

幾何学 III 10. 1-パラメータ変換群と Lie 微分

1-パラメータ変換群

M を可微分多様体とする. U は $\mathbf{R} \times M$ の $\{0\} \times M$ を含む開集合で, $U \cap (\mathbf{R} \times x), x \in M$ は連結とする. C^∞ 写像 $\varphi: U \rightarrow M$ が次の条件 (1), (2) を満たすとき, φ を M 上の 1 径数変換群 (1-parameter transformation group) またはフローとよぶ.

- (1) $\varphi(s, \varphi(t, x)) = \varphi(s+t, x)$
- (2) $\varphi(0, x) = x, \quad x \in M$

ここで, $\varphi_t: M \rightarrow M$ を $\varphi_t(x) = \varphi(t, x)$ とおく. M 上の 1 径数変換群 φ が与えられたとき, ベクトル場 X を

$$X_p = \frac{d\varphi}{dt}(0, p) \quad (1)$$

で定義する. 常微分方程式の解の存在と一意性定理より, M 上のベクトル場 X に対して, 上のような開集合 U を適当にとれば, 条件 (1) を満たす 1 径数変換群 φ が U 上一意に存在する. このとき, φ_t を X が生成する 1 径数変換群とよび, $\text{Exp}(tX)$ で表す. $\text{Exp}(tX)$ の定義域が $\mathbf{R} \times M$ 全体になるとき, ベクトル場 X は完備であるという. M をコンパクトとすると, M 上のベクトル場は常に完備であり, 大域的な 1 径数変換群を生成する.

Lie 微分

ベクトル場 X に対して, 微分形式の Lie 微分

$$\mathcal{L}_X: \Omega^p(M) \longrightarrow \Omega^p(M)$$

を対応する 1 径数変換群 φ_t を用いて

$$\mathcal{L}_X \omega(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi_t^* \omega(x) - \omega(x)}{t}$$

で定義する.

Lie 微分は次のような性質をもつ.

1. $\mathcal{L}_X(\omega_1 \wedge \omega_2) = \mathcal{L}_X\omega_1 \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge \mathcal{L}_X\omega_2$
2. M 上の C^∞ 級関数 f に対して $\mathcal{L}_X f = Xf$
3. $d\mathcal{L}_X\omega = \mathcal{L}_X(d\omega)$

ベクトル場 X に対して, 内部積

$$\iota(X) : \Omega^p(M) \longrightarrow \Omega^{p-1}(M)$$

を次のように定める. まず $j = i_k$ のとき,

$$\iota\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} = (-1)^{k-1} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{k-1}} \wedge dx_{i_{k+1}} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$$

とおき, 一般のベクトル場と p 次微分形式について線形に拡張する. ただし, j が $\{i_1, \dots, i_p\}$ に含まれないときは上の式は 0 とおく. ω_1 を p 次微分形式とすると

$$\iota(X)(\omega_1 \wedge \omega_2) = (\iota(X)\omega_1) \wedge \omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge (\iota(X)\omega_2)$$

が成立する.

Lie 微分, 内部積, 外微分について Cartan の公式

$$\mathcal{L}_X\omega = (\iota(X)d + d\iota(X))\omega$$

が成り立つ.