1．微分形式の幾何学への入門

ユークリッド空間の領域上の微分形式とその外微分

ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ の領域 D で定義された 1 次微分形式 ω は，座標関数 $x_1, \cdots, x_n$ を用いて

$$\omega = a_1 dx_1 + \cdots + a_n dx_n$$

と表される．ここで， $a_1, \cdots, a_n$ は D で定義された C^∞ 関数である．
一般に D 上の p 次数微分形式 ω は

$$\omega = \sum_{i_1,\cdots,i_p} a_{i_1,\cdots,i_p}\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$$

と表される．ここで，$a_{i_1,\cdots,i_p}$ は D で定義された C^∞ 関数で，$dx_1, \cdots, dx_n$ のウェッジ積は外積代数の関係式

$$dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$$

を満たす．
上の p 次微分形式 ω について，その外微分 $d\omega$ を

$$d\omega = \sum_{\imath_1,\cdots,i_p} da_{i_1,\cdots,i_p} \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$$

で定める，これは D 上の $(p+1)$ 次微分形式である．外微分 d は $d \circ d = 0$ を満たすことが確かめられる．$d\omega = 0$ を満たす微分形式 ω を閉形式とよぶ．また，ある微分形式 φ を用いて $\omega = d\varphi$ と表されるとき，ω を完全形式とよぶ．完全形式は閉形式となる．

3 次元の場合の具体的な表示

$n = 3$ のとき，微分形式の外微分を計算してみよう．1 次微分形式

$$\omega = a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + a_3 dx_3$$

の外微分は

$$d\omega = \left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3}\right) dx_2 \wedge dx_3 + \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1}\right) dx_3 \wedge dx_1 + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2$$

と表される．これはベクトル解析におけるベクトル場

$$\mathbf{a} = a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + a_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

の $\operatorname{rot} \mathbf{a}$ に対応する．

また，2 次微分形式 $\omega = b_1 dx_2 \wedge dx_3 + b_2 dx_3 \wedge dx_1 + b_3 dx_1 \wedge dx_2$ の外微分は

$$d\omega = \left(\frac{\partial b_1}{\partial x_1} + \frac{\partial b_2}{\partial x_2} + \frac{\partial b_3}{\partial x_3} \right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

と表され，これはベクトル場の発散 div に対応する．

1 次微分形式の曲線に沿った積分

ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ の領域 D のなめらかな曲線

$$\gamma : [0, 1] \longrightarrow D$$

に対する 1 次微分形式 $\omega = a_1 dx_1 + \cdots + a_n dx_n$ の積分を

$$\int_\gamma \omega = \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 a_i(\gamma_1(t), \cdots, \gamma_n(t)) \frac{d\gamma_i}{dt}(t)\, dt$$

で定義する．この値は，曲線 γ のパラメータ表示によらずに定まる．