

幾何学 I 演習 陰関数定理，一般位相の復習など

1. a を実数として， xy -平面上の曲線

$$C: x^2(x+a) - y^2 = 0$$

を考える．

(1) 導関数 dy/dx が定義されるための条件を求め，この導関数を x, y で表せ．

(2) 曲線 C 上の正則点における接線の方程式を求めよ．

(3) 正則点ではない点のまわりの状況に注意し， a の符号によって分類して，曲線 C の概形を描け．

2. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を

$$f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$$

で定義する．写像 f は同相写像か．また f は局所的な同相写像か，つまり， \mathbb{R}^2 の点 p において， p を含むある開集合 U が存在して， f の U への制限が同相写像になるかを調べよ．

3. 位相空間 X がコンパクトであることの定義を述べよ．また，この定義から直接， \mathbb{R} の半開区間 $(0, 1]$ は，相対位相についてコンパクトでないことを証明せよ．

4. q は 0 でない複素数とする． $\mathbb{C} - \{0\}$ の同値関係 $z \sim w$ を，ある整数 n が存在して $z = q^n w$ となることとして定義する．商空間 $X = (\mathbb{C} - \{0\}) / \sim$ がコンパクトになるための q の条件を求めよ．また， X が Hausdorff 空間になるための q の条件を求めよ．