幾何学 I　9．多様体上の 1 の分割と埋め込み定理

可微分多様体上の 1 の分割

M を可微分多様体とする．$\{U_\alpha\}$ を M の開被覆とするとき，M 上の可算個の C^∞ 関数 λ_i, $i = 1, 2, \cdots$ で以下の性質を満たすものが存在する．

(1) すべての i について，$\lambda_i(x) \geq 0$ であり，$\mathrm{supp}\lambda_i$ はコンパクトである．

(2) $\{\mathrm{supp}\lambda_i\}$ は局所有限である．

(3) $x \in M$ について $\sum_i \lambda_i(x) = 1$ が成立する．

(4) すべての i について, ある α が存在して，$\mathrm{supp}\lambda_i \subset U_\alpha$ が成り立つ．

上のような性質を満たす λ_i, $i = 1, 2, \cdots$ を開被覆 $\{U_\alpha\}$ に対する 1 の分割とよぶ.

コンパクト可微分多様体のユークリッド空間への埋め込み

1 の分割の応用として，コンパクト n 次元可微分多様体 M は，十分高い次元のユークリッド空間 $\mathbf{R}^N$ に埋め込めることが証明できる．実際には，$N = 2n$ ととれることが，Whitney の定理として知られている．

ユークリッド空間 $\mathbf{R}^N$ 内の部分多様体 M に対して

$$\nu M = \{(x, v) \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N \mid x \in M, \langle v, w \rangle = 0, w \in T_x M\}$$

は，$\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$ の部分多様体であり，M の $\mathbf{R}^N$ における法束 (normal bundle) とよばれる．ここで，$T_x M$ は，埋め込み写像の微分により，$\mathbf{R}^N$ の線形部分空間と同一視している．