幾何学 I　8. Sard の定理とその応用

Sard の定理

M, N を可微分多様体，次元をそれぞれ m, n とする．$f : M \to N$ を C^∞ 写像とするとき，f の臨界値の集合は，N の測度 0 の集合である．

Sard の定理の証明の概要

$\mathbf{R}^m$ の開集合 U と C^∞ 写像 $f : U \to \mathbf{R}^n$ について，

$$C = \{x \in U \mid \operatorname{rank}(df)_x < n\}$$

とおく．Sard の定理の証明には，$f(C)$ の $\mathbf{R}^n$ における測度が 0 であることを示せば十分である．$C_1 = \{x \in U \mid (df)_x = 0\}$ とおく．また，C_j を f の j 次以下の偏微分係数がすべて 0 になるような U の点全体の集合とする．このとき，閉集合の列

$$C \supset C_1 \supset C_2 \supset \cdots \supset C_j \supset \cdots$$

が得られる．Sard の定理は以下のステップに分けて証明される．

Step 1　$f(C - C_1)$ は測度 0 である．

Step 2　$f(C_k - C_{k+1}), k \geq 1$ は測度 0 である．

Step 3　十分大きな k について $f(C_k)$ は測度 0 である．

写像度

M, N を向き付けられた連結な可微分多様体，$f : M \to N$ を C^∞ 写像とする．ここでは，M はコンパクトで $m = n$ とする．f の正則値 y をとり

$$f^{-1}(y) = \{p_1, \cdots, p_k\}$$

とおく，$\det\,(df)_{p_j}$ の正負によって，$\operatorname{sgn}(p_j) = 1$ または -1 とおき，

$$\deg(f, y) = \sum_{j=1}^{k} \operatorname{sgn}(p_j)$$

で表す．$\deg(f, y)$ は正則値 y の取り方によらずに f のみによって定まる．これを，$\deg f$ で表し f の写像度とよぶ．$f, g : M \to N$ が互いにホモトープならば，

$$\deg f = \deg g$$

が成立する．