幾何学 I　7．多様体上の写像，正則値と臨界値

M, N を可微分多様体，次元をそれぞれ m, n とする．$f : M \to N$ を C^∞ 写像とする．

多様体における逆関数定理，陰関数定理

すべての $p \in M$ について，$(df)_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ が同型写像であるとき，p の近傍 U が存在して，$f : U \to f(U)$ は微分同相となる．

また，$m \geq n$ で $(df)_p$ が全射であるとき，p のまわりでの局所座標 $(x_1, \cdots, x_m)$, $f(p)$ のまわりでの局所座標 $(y_1, \cdots, y_n)$ を適当に選んで，

$$y_i \circ f(x_1, \cdots, x_m) = x_i, \quad 1 \leq i \leq n$$

となるようにできる．

同様に，$m \leq n$ で $(df)_p$ が単射であるとき，p のまわりでの局所座標 $(x_1, \cdots, x_m)$, $f(p)$ のまわりでの局所座標 $(y_1, \cdots, y_n)$ を適当に選んで，

$$y_i \circ f(x_1, \cdots, x_m) = x_i, \quad 1 \leq i \leq m, \quad y_j \circ f(x_1, \cdots, x_m) = 0, \quad m+1 \leq i \leq n$$

となるようにできる．

正則値と臨界値

点 $p \in M$ における微分 $(df)_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ が全射であるとき，f は p において正則 (regular) であるという．f が p において正則でないとき，p を f の臨界点 (critical point) という．f の臨界点全体の集合を $\mathcal{C}$ で表す．$\mathcal{C}$ の像 $f(\mathcal{C})$ を f の臨界値の集合とよぶ．M の像 $f(M)$ で $f(\mathcal{C})$ に含まれない点を f の正則値 (regular value) という．

定理　M, N を可微分多様体，$f : M \to N$ を C^∞ 写像とする．$f^{-1}(q) \neq \emptyset$ で q が f の正則値ならば，$f^{-1}(q)$ は M の閉部分多様体である．

Sard の定理　上の状況で f の臨界値の集合 $f(\mathcal{C})$ は，N の測度 0 の集合である．

Morse 関数

M を n 次元可微分多様体とする．M 上の C^∞ 関数 $f : M \to \mathbf{R}$ の臨界点 p が非退化であるとは，f の p における Hessian$H_p(f)$ が正則行列となることである．すべての臨界点が非退化であるような関数を Morse 関数とよぶ．f の非退化な臨界点 p に対して，$H_p(f)$ の負の固有値の個数を f の p における指数 (index) とよぶ.

Morse の補題　M 上の C^∞ 関数 $f : M \to \mathbf{R}$ の非退化な臨界点 p について，p のまわりのある局所座標 $(x_1, \cdots, x_n)$ を用いて，

$$f(x) = f(p) - x_1^2 - \cdots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \cdots + x_n^2$$

と表される．ここで，λ は f の臨界点 p における指数である．