幾何学Ｉ　6．多様体のはめ込みと埋め込み，部分多様体

はめ込みと埋め込みの定義

M, N を可微分多様体，$f : M \to N$ を C^∞ 写像とする．すべての $p \in M$ について，$(df)_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ が単射であるとき，f は，はめ込み (immersion) であるという．さらに，f が M から像 $f(M)$ への同相写像になっているとき，f は埋め込み (embedding) であるという．ここで，$f(M)$ には N の部分空間としての相対位相を入れる．

埋め込みと部分多様体

M, N の次元をそれぞれ，m, n とする．$f : M \to N$ を埋め込みとする．このとき，$f(M)$ の任意の点 q に対して，q のまわりの局所座標 $(V, (y_1, \cdots, y_n))$ で，

$$f(M) \cap V = \{(y_1, \cdots, y_n) \in V \mid y_{m+1} = \cdots = y_n = 0\}$$

となるものがとれる．

一般に N の部分集合 N' について，N' の任意の点 q のまわりの局所座標 $(V, (y_1, \cdots, y_n))$ で，

$$N' \cap V = \{(y_1, \cdots, y_n) \in V \mid y_{m+1} = \cdots = y_n = 0\}$$

となるものがとれるとき，N' を N の部分多様体 (submanifold) という．N' は相対位相を入れることにより，m 次元可微分多様体の構造をもつ．

注意

$f : M \to N$ が単射でも，はめ込みではない例がある．例えば，$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x^3$ など．また，演習問題 6-2 のトーラス上の曲線のように，単射で，はめ込みであっても，埋め込みにはならない例がある．