幾何学I　5．接ベクトル束

M を n 次元可微分多様体とする．$TM = \cup_{x \in M} T_x M$ （共通部分を持たない和集合）とおいて，TM に以下のように可微分多様体の構造を入れる．

まず，$\pi : TM \to M$ を自然な射影とする．また，(U, φ) を M の局所座標系とする．U の点 p をとる．接空間 $T_p M$ の要素

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p$$

に対して，$\widetilde{\varphi}(v) = (p, (\alpha_1, \cdots, \alpha_n))$ とおいて，写像

$$\widetilde{\varphi} : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbf{R}^n$$

を定義する．別の局所座標 (V, ψ), $p \in V$ について，

$$v = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \left(\frac{\partial}{\partial y_i} \right)_p$$

と表すと，座標変換 $\widetilde{\psi} \circ \widetilde{\varphi}^{-1}(p, (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)) = (p, (\beta_1, \cdots, \beta_n))$ は

$$\beta_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right)(p)$$

で与えられる．TM の部分集合 O が開集合であるとは，局所座標系 (U, φ) に対して，$\widetilde{\varphi}(O \cap \pi^{-1}(U))$ が $U \times \mathbf{R}^n$ の開集合であることと定義する．このようにして，TM は位相空間となり，上の $(\pi^{-1}(U), \widetilde{\varphi})$ を局所座標系とする $2n$ 次元可微分多様体の構造をもつ．TM を M の接ベクトル束 (tangent vector bundle) とよぶ．

M, N を可微分多様体，$f : M \to N$ を C^∞ 写像とする．C^∞ 写像 $df : TM \to TN$ が，$df(v) = (df)_p(v), v \in T_p M$ として定義される．このように，多様体の間の写像の大域的な微分は，接ベクトル束の間の写像として定式化される．

可微分多様体 M が向き付け可能であるとは，局所座標系で $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ のとき，座標変換 $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ のヤコビ行列式が常に正となるものがとれることをいう．これは， 接ベクトル束において，$T_p M$ の向きを p について連続的に与えられることを意味する．