幾何学 I　4．群作用と商多様体

M を可微分多様体，G を群とする．G が M に左から C^∞ 級に**作用**するとは，$g \in G$ に対して C^∞ 写像 $\varphi_g : M \to M$ があって，

$$\varphi_{gh} = \varphi_g \circ \varphi_h, \quad \varphi_e = id$$

を満たすことである．ここで，e は G の単位元を表す．以降，$\varphi_g(x) = g \cdot x$ と表すこともある．M の点 x に対して，

$$G \cdot x = \{g \cdot x \mid g \in G\}$$

とおき，x の G **軌道** (orbit) とよぶ．また，

$$G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$$

とおき，x の**固定部分群** (isotropy subgroup) とよぶ．すべての $x \in M$ に対して，G_x が単位元のみからなるとき，G の作用は**自由** (free) であるという．M に同値関係 $\sim$ を，以下のように定義する．$x, y \in M$ に対して，$x \sim y$ とは，ある $g \in G$ があって，$y = g \cdot x$ となることとする．この同値関係による同値類の集合に商位相を入れ，M/G で表す．商空間 M/G は，一般には多様体の構造をもつとは限らないが，いくつかの条件の下で，可微分多様体になる．以下にいくつかの例を挙げよう．

例 1 (実射影空間) n 次元球面 S^n に 2 次の巡回群 $\mathbf{Z}_2$ が，$g \cdot x = -x$ によって作用する．この作用による商空間 $S^n/\mathbf{Z}_2$ は，可微分多様体の構造を持ち，$\mathbf{R}P^n$ と微分同相である．

例 2 (ユークリッド平面の合同変換群) Γ をユークリッド平面 E の合同変換群の部分群で，自由かつ離散的とする．ここで，**離散的** (discrete) とは，ユークリッド平面の任意の点 x に対して，軌道 $\Gamma \cdot x$ が集積点を持たないこととする．このとき，商空間 $M = E/\Gamma$ は 2 次元可微分多様体の構造をもつ．$\pi : E \to M$ を射影とする．M には，

$$d(x_1, x_2) = min_{g \in \Gamma} \ \|y_1 - gy_2\|, \quad \pi(y_i) = x_i, \quad i = 1, 2$$

によって，距離空間の構造が入る．このような M の例として，ユークリッド平面，円柱 $S^1 \times \mathbf{R}$, 開メビウスバンド，トーラス，クラインの壷の 5 通りの場合があることが知られている．これらは，上の距離に関して，局所的にユークリッド平面の開円板と合同であり，局所ユークリッド幾何構造をもつ．