幾何学 I　3．多様体間の写像とその微分

可微分多様体 M, N の次元をそれぞれ m, n として，M から N への C^∞ 級写像 f を考える．M の点 p について，$f(p) = q \in N$ とおく．点 q の近傍で定義された C^∞ 級関数 h をとる．M の p における接空間 T_pM の要素 θ に対して，$f_*\theta \in T_qN$ を

$$f_*\theta(h) = \theta(h \circ f)$$

で定める．この対応により定まる T_pM から T_qN への線形写像を

$$(df)_p : T_pM \to T_qN$$

で表し，写像 f の p における微分とよぶ．

M の C^∞ 曲線，$\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ で $\gamma(0) = p$ となるものが与えられたとき，方向微分 X_γ は，接空間 T_pM の要素とみなされる．微分 $(df)_p$ は，方向微分に関して，

$$(df)_p(X_\gamma) = X_{f\circ\gamma}$$

を満たす．

点 p のまわりで，局所座標系 $(x_1, \cdots, x_m)$，点 q のまわりで，局所座標系 $(y_1, \cdots, y_n)$ をとる．写像の合成 $y_j \circ f$ を f_j, $1 \leq j \leq n$ とおいて，$x_1, \cdots, x_m$ の関数とみなすと，微分 $(df)_p$ は，接空間の基底に関して

$$(df)_p \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p) \left(\frac{\partial}{\partial y_j} \right)_q$$

と表すことができる．

線形写像 $(df)_p : T_pM \to T_qN$ のランクを，写像 $f : M \to N$ の点 p におけるランクとよぶ．可微分多様体 M, M', M'' について，C^∞ 級写像 $f : M \to M'$, $g : M' \to M''$ が与えられていて，$f(p) = q$, $g(q) = r$ とする．写像の合成の微分について

$$d(g \circ f)_p = (dg)_q \circ (df)_p : \ T_pM \to T_rM''$$

が成立する．これを用いると，$f : M \to N$ が微分同相のとき，$(df)_p$ は線形同型となり，とくに，次元は $m = n$ を満たすことが分かる．