幾何学 I　2．多様体の接空間

可微分多様体 M の点 p に対して，p のある開近傍上で定義された C^∞ 級関数全体を $\mathcal{F}_p$ で表す．$\mathcal{F}_p$ は $\mathbf{R}$ 上の線形空間の構造をもつ．写像 $\theta : \mathcal{F}_p \to \mathbf{R}$ で，以下の性質 (i), (ii) をもつもの全体を T_pM とおく．

(i) (線形性)　$\theta(f+g) = \theta(f) + \theta(g), \quad \theta(\alpha f) = \alpha\theta(f), \quad \alpha \in \mathbf{R}$

(ii) (ライプニッツ則)　$\theta(fg) = \theta(f)g(p) + f(p)\theta(g)$

T_pM は線形空間の構造をもつ．

正の数 ε について，M の C^∞ 曲線，$\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ で $\gamma(0) = p$ となるものが与えられたとき，$f \in \mathcal{F}_p$ に対して，

$$X_\gamma(f) = \left.\frac{d(f(\gamma(t))}{dt}\right|_{t=0}$$

とおく．X_γ は T_pM の要素となり，f の p における γ についての**方向微分**とよぶ．点 p の周りで，局所座標 $(x_1, \cdots, x_n)$ をとると，p における x_i 方向の方向微分

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p, \quad i = 1, \cdots, n \tag{1}$$

が定義される．

ここで，T_pM は，p を通る C^∞ 曲線についての p における方向微分全体で生成されることがわかる．M を n 次元多様体とすると，T_pM は n 次元線形空間となり，M の p における**接空間**とよばれる．上のように局所座標系をとると (1) の n 個のベクトルが T_pM の基底となることが示される．

点 p のまわりで，別の座標系 $(y_1, \cdots, y_n)$ をとると，基底は，

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y_j}{\partial x_i}(p) \left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_p$$

という規則で変換する．

$\mathcal{F}_p$ の要素 f に対して，$(df)_p : T_pM \to \mathbf{R}$ が $\theta \in T_pM$ に対して，$\theta(f) \in \mathbf{R}$ を対応させることによって定義される．このようにして，f の点 p における微分は，接空間の双対空間の要素として定式化される．$(df)_p = 0$ となるとき，p を f の**臨界点**とよぶ．局所座標をとると，これは

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p f = 0, \quad i = 1, \cdots, n$$

となることと同値である．