幾何学 I　12．Riemann 多様体上の曲線と測地線の方程式

ユークリッド空間内の曲面上の測地線

$\mathbf{R}^2$ の領域 U の埋め込み $p : U \to \mathbf{R}^3$ で定まる曲面上の曲線

$$c(t) = p(u_1(t), u_2(t))$$

を考える．この曲線の加速度ベクトルは

$$\frac{d^2c}{dt^2} = \sum_i \frac{\partial p}{\partial u_i}\frac{d^2u_i}{dt^2} + \sum_{i,j} \frac{\partial^2 p}{\partial u_i \partial u_j}\frac{du_i}{dt}\frac{du_j}{dt}$$

と表される．ここで，$\frac{\partial^2 p}{\partial u_i \partial u_j}$ を曲面の接平面と法線ベクトル n の方向に分解して

$$\frac{\partial^2 p}{\partial u_i \partial u_j} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial p}{\partial u_k} + h_{ij} n$$

と表しておく．加速度ベクトルの接平面方向の成分が 0 になるとき，曲線は

$$\frac{d^2u_k}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{du_i}{dt}\frac{du_j}{dt} = 0, \quad k = 1, 2$$

を満たす．この微分方程式を満たす曲線を測地線という．ここで，Γ_{ij}^k は，曲面の Riemann 計量を用いて，

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_\ell g^{k\ell}\left(\frac{\partial}{\partial u_i}g_{j\ell} + \frac{\partial}{\partial u_j}g_{\ell i} - \frac{\partial}{\partial u_\ell}g_{ij}\right)$$

と表すことができる．この表示を一般化して，Riemann 多様体上の測地線の概念を定式化することができる．測地線は曲線の長さを極小にするという変分問題の解としても得られる．

変分法と Euler-Lagrange の方程式

可微分多様体 M の接バンドル TM 上に，なめらかな関数 $L : TM \to \mathbf{R}$ が与えられているとする．始点が $\mathbf{x}_0$ で，終点が $\mathbf{x}_1$ であるような M のなめらかな曲線 $\gamma : [0,1] \to M$ に対して，

$$S(\gamma) = \int_0^1 L(\gamma(t), \gamma'(t))\ dt$$

とおく．端点を固定する曲線の変形族 $\phi(u)(t)$, $-\epsilon < u < \epsilon$ で $\phi(0) = \gamma$ となるものについて，$f(u) = S(\phi(u))$ とおいて，$f'(0)$ を計算すると，

$$f'(0) = \int_0^1 \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial x_j} v_j(t) + \frac{\partial L}{\partial \xi_j} \frac{d}{dt} v_j(t) \right)\ dt$$

ここで，$(x_1, \cdots, x_n, \xi_1, \cdots, \xi_n)$ は TM の局所座標で $v_j(t)$ は変分ベクトル場 $v(t)$ の第 j 成分を表す．上の積分の第 2 項に部分積分を適用すると

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\partial L}{\partial \xi_j} \frac{d}{dt} v_j(t)\ dt &= \left. \frac{\partial L}{\partial \xi_j} v_j(t) \right|_0^1 - \int_0^1 \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \xi_j} v_j(t)\ dt \\ &= - \int_0^1 \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \xi_j} v_j(t)\ dt \end{aligned}$$

となるので，

$$f'(0) = \int_0^1 \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \xi_j} \right) v_j(t)\ dt$$

が得られる．関数 S が道 γ で極小であるとすると，必要条件として

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \xi_j} = 0, \quad 1 \le j \le n$$

が得られる．これを Euler-Lagrange の方程式という．特に L を Riemann 計量について，接ベクトルの長さを与える関数をとると，Euler-Lagrange の方程式を満たす曲線として，測地線が得られる．