幾何学 I　11．多様体上のベクトル場とフロー

M を n 次元可微分多様体とする．

ベクトル場

M の各点 p における接ベクトル空間 T_pM の要素 X_p が与えられているとする．点 p のまわりの局所座標系 $(U,(x_1,\cdots,x_n))$ をとり，U の点 q について

$$X_q = \sum_{i=1}^{n} a_i(q) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_q$$

とおく．関数 a_i が各点の近傍 U で C^∞ 級であるとき，対応 $p \mapsto X_p$ を X で表し M 上の C^∞ 級ベクトル場という．以下，ベクトル場は C^∞ 級とする．

M 上の C^∞ 級関数全体を $C^\infty(M)$ で表す．また，M 上のベクトル場全体を $\chi(M)$ で表す．$\chi(M)$ は，$C^\infty(M)$ 上の代数の構造をもつ．また，$(Xf)(p) = X_p f$ と定めることにより，$\chi(M)$ は，$C^\infty(M)$ に微分作用素として作用し，

$$X(fg) = Xf \cdot g + f \cdot Xg$$

が満たされる．

M 上のベクトル場 X, Y に対して

$$[X,Y]f = X(Yf) - Y(Xf), \quad f \in C^\infty(M)$$

とおくと，$[X,Y]$ は M 上のベクトル場となる．これを X, Y の交換子積（ブラケット積）とよぶ．交換子積を与える演算は，双線形であり，次のように交代性と Jacobi 律を満たす．

$$\begin{aligned}&[X,Y] = -[Y,X]\\&[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0\end{aligned}$$

このようにして，$\chi(M)$ は Lie 代数の構造をもつ．

1 径数変換群（フロー）

U は $\mathbf{R}\times M$ の開集合で，$U\cap(\mathbf{R}\times x), x\in M$ は連結とする．C^∞ 写像 $\varphi : U\to M$ が次の条件 (1), (2) を満たすとき，φ を M 上の 1 径数変換群 (1-parameter transformation group) とよぶ.

(1)　$\varphi(s,\varphi(t,x))=\varphi(s+t,x)$
(2)　$\varphi(0,x)=x,\quad x\in M$

ここで，$\varphi_t : M\to M$ を $\varphi_t(x)=\varphi(t,x)$ とおくと φ_t は M の微分同相写像である．M 上の 1 径数変換群 φ が与えられたとき，ベクトル場 X を

$$X_p=\frac{d\varphi}{dt}(0,p) \tag{1}$$

で定義する．常微分方程式の解の存在と一意性定理より，M 上のベクトル場 X に対して，上のような開集合 U を適当にとれば，条件 (1) を満たす 1 径数変換群 φ が U 上一意に存在する．このとき，φ_t を X が生成する 1 径数変換群とよび，$\mathrm{Exp}(tX)$ で表す．$\mathrm{Exp}(tX)$ の定義域が $\mathbf{R}\times M$ 全体になるとき，ベクトル場 X は完備であるという．M をコンパクトとすると，M 上のベクトル場は常に完備であり，大域的な 1 径数変換群を生成する．