幾何学 I　10．多様体上のリーマン計量

リーマン計量

　M を可微分多様体とする．M の各点 p における接ベクトル空間 T_pM に，内積（正定値な対称双線形形式)

$$g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbf{R}$$

が与えられているとする．点 p のまわりの局所座標系 $(U, (x_1, \cdots, x_n))$ をとり，U の点 q について

$$g_{ij}(q) = g_q\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_q,\ \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_q\right)$$

とおく．g_{ij} が M の各点の近傍で C^∞ 級であるとき，M の各点 p に内積 g_p を対応させる対応 g を M のリーマン計量とよぶ．また，リーマン計量が与えられた可微分多様体をリーマン多様体とよぶ．

　別の局所座標 $(y_1, \cdots, y_n)$ について，

$$\overline{g}_{ij}(q) = g_q\left(\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_q,\ \left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_q\right)$$

とおくと，変換規則

$$g_{ij}(q) = \sum_{k,\ell} \overline{g}_{k\ell}(q)\frac{\partial y_k}{\partial x_i}(q)\frac{\partial y_\ell}{\partial x_j}(q)$$

が成立する．

　リーマン多様体 M について，接ベクトル $v \in T_pM$ の長さを

$$\|v\| = \sqrt{g_p(v, v)}$$

で定義する．可微分多様体 M 上のなめらかな曲線 $\gamma : [0, 1] \to M$ に対して，γ の長さを

$$L(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\|\ dt$$

で定める．

リーマン計量の存在，誘導されたリーマン計量

1 の分割を用いると，可微分多様体にはリーマン計量が存在することを示すことができる．これは，局所的にユークリッド計量を与えて，1 の分割により足し合わせればよい．

$f : M \to N$ をはめ込みとする．N にリーマン計量が与えられているとき，

$$g_{ij}(p) = g_p\left(df_p\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p,\ df_p\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p\right)$$

とおくことにより，M のリーマン計量が定まる．これを，f によって N の計量から誘導されたリーマン計量とよぶ．とくに，f がユークリッド空間へのはめ込みのとき，M には f によってユークリッド計量から誘導されたリーマン計量が入る．

ユークリッド空間内の曲面

$\mathbf{R}^2$ の領域 D から $\mathbf{R}^3$ へのなめらかな写像 φ で定義された曲面について，$\mathbf{R}^3$ のユークリッド計量から導かれるリーマン計量を入れる．この曲面の点 P における法線ベクトルを $\mathbf{n}$ として，

$$h_{ij} = \langle\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_i \partial u_j}, \mathbf{n}\rangle$$

とおく．$H = (h_{ij})$ とすると，曲面は P のまわりで 2 次形式 $\sum h_{ij}\xi_i\xi_j$ によって近似される．これを接平面の正規直交基底にとりなおして対応する対称行列を H' とおく．このとき，$\kappa = \det H'$, $H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2)$ とおき，それぞれ，曲面の P におけるガウス曲率，平均曲率とよぶ．$G = (g_{ij})$ とおくとガウス曲率は

$$\kappa = \frac{\det H}{\det G}$$

と表される．