幾何学 I　1. 多様体の定義と例

超曲面の局所座標

Euclid 空間 $\mathbf{R}^{n+1}$ 上の C^1 級関数 $F(x_1, \cdots, x_{n+1})$ によって

$$F(x_1, \cdots, x_{n+1}) = 0$$

で定まる超曲面 V を考える．V の任意の点 a において，ある $i, 1 \leq i \leq n+1$ に対して

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(a) \neq 0 \tag{1}$$

であると仮定する．例えば $i = 1$ に対してこの仮定が満たされているとすると，陰関数定理より，$(a_2, \cdots, a_{n+1})$ を含む $\mathbf{R}^n$ の開集合 W_1 が存在して，a の近傍で V は $x_1 = f_1(x_2, \cdots, x_{n+1})$ のグラフとして表すことができる．$U_1 = f_1(W_1)$ とおき，自然な射影を $\varphi_1 : W_1 \to U_1$ とする．この φ_1 により，a のまわりで，局所座標を導入することができる．また，a のまわりで，$i = 2$ についても仮定 (1) が満たされているとすると，座標変換 $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ は C^1 級写像となる．

可微分多様体の定義

位相空間 M の開集合の族 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ と，それぞれの U_λ から $\mathbf{R}^n$ への連続写像 φ_λ が与えられていて，以下の条件 (1), (2), (3) を満たしているとする．

(1)　$M = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$

(2)　$\varphi_\lambda(U_\lambda)$ は，$\mathbf{R}^n$ の開集合であり，$\varphi_\lambda : U_\lambda \to \varphi_\lambda(U_\lambda)$ は同相写像である．

(3)　$U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ のとき，

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

は C^r 写像である．

このような開集合の族 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を M の C^r 級局所座標系という．このとき，$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ の逆写像 $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ も定義より C^r 級となり，座標変換 $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ は C^r 級微分同相写像となる．

位相空間 M が Hausdorff，かつ第二可算公理を満たし，さらに，C^r 級局所座標系 $\{U_\lambda, \varphi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が与えられているとき，M を n 次元 C^r 多様体とよぶ．また，C^∞ 多様体を可微分多様体とよぶこともある．

いくつかの例

例 1. $M = \mathbf{R}^n$ はそれ自身，可微分多様体とみなせる．

例 2. M として n 次元球面

$$S^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$$

をとる．$U_i^+ = \{(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}) \in S^n \mid x_i > 0\}, U_i^- = \{(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}) \in S^n \mid x_i < 0\}$ とおき，φ_i^+, φ_i^- を

$$\varphi_i^{\pm}(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}) = (x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_{n+1}), \quad i = 1, \cdots, n+1$$

と定義することにより，S^n は n 次元可微分多様体の構造をもつ．

例 3．$\mathbf{R}^{n+1} - \{0\}$ に同値関係 $\sim$ を以下のように定める．$x \sim y$ とは，0 でない実数 λ が存在して，$x = \lambda y$ となることとする．実射影空間 $\mathbf{R}P^n$ を，商空間 $\mathbf{R}^{n+1} - \{0\}/\sim$ として定義する．$(x_1, \cdots, x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} - \{0\}$ の定める同値類を $[x_1 : \cdots : x_{n+1}]$ で表す．

$$U_i = \{[x_1 : \cdots : x_{n+1}] \in \mathbf{R}P^n \mid x_i \neq 0\}, \quad i = 1, \cdots, n+1$$

とおき，$\varphi_i : U_i \to \mathbf{R}^n$ を

$$\varphi_i([x_1 : \cdots : x_{n+1}]) = (x_1/x_i, \cdots, x_{i-1}/x_i, x_{i+1}/x_i, \cdots, x_{n+1}/x_i)$$

と定義すると，$\mathbf{R}P^n$ は n 次元可微分多様体の構造をもつ．

例 4. S^1 の n 個の直積 $T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$ は，n 次元可微分多様体の構造をもつ．T^n を n 次元トーラスとよぶ．