

## 幾何学I演習 9 多様体上の関数, 1の分割の応用など

1.  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  を次のように定義する.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

$f$  は  $C^\infty$  級関数であることを示せ.

2.  $f: M \rightarrow \mathbf{R}$  を可微分多様体上の  $C^\infty$  級関数とする.  $F: M \rightarrow M \times \mathbf{R}$  を  $F(x) = (x, f(x))$  で定義すると,  $F$  は埋め込みであることを示せ.

3. 可微分多様体上に互いに交わらない空でない閉集合  $A_1, \dots, A_k$  が与えられている.  $a_1, \dots, a_k \in \mathbf{R}$  とする.  $M$  上の  $C^\infty$  級関数で  $A_j$  上値  $a_j$ ,  $1 \leq j \leq k$  をとるものが存在することを示せ.

4.  $M$  をユークリッド空間  $\mathbf{R}^N$  の部分多様体とする.

$$N(M) = \{(x, v) \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N \mid x \in M, \langle v, w \rangle = 0, \forall w \in T_x M\}$$

とおく. ここで, 包含写像  $i: M \rightarrow \mathbf{R}^N$  により  $T_x M \subset T_x \mathbf{R}^N$  とみなす.

(1)  $N(M)$  は  $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$  の部分多様体であることを示せ.

(2)  $M = S^{N-1}$  とする.  $f: N(M) \rightarrow \mathbf{R}^N$  を  $f(x, v) = x + v$  で定める.  $f$  の臨界点を求めよ.