

幾何学I演習 8 Sardの定理, 写像度

1. $f: S^n \rightarrow S^n$ を

$$f(x_1, \dots, x_{n+1}) = (-x_1, \dots, -x_{n+1})$$

で定める. f の写像度を求めよ.

2. $f: S^1 \rightarrow \mathbf{R}^2$ をはめ込みとする. f の回転量 $\tau(f)$ を $x \in S^1$ の対して

$$f'(x) / \|f'(x)\|$$

を対応させることによって定義される写像 $g: S^1 \rightarrow S^1$ の写像度として定義する.

(1) 整数 n に対して, $\tau(f) = n$ となるような f の例を挙げよ.

(2) 回転量が互いに異なるはめ込み $f_0, f_1: S^1 \rightarrow \mathbf{R}^2$ は, はめ込みの C^∞ 族によって互いに變形することができないことを示せ.

3. $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ を C^∞ 級関数とする.

$$F(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) + a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$$

が Morse 関数となるような $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{R}$ が存在することを示せ.