幾何学I演習　7　正則値と臨界値

1. 次の関数の臨界点を求め，それが非退化かどうかを調べよ．また，非退化な臨界点について，その指数を求めよ．

(1) $f(x,y) = xy(x^2+y^2-1)$

(2) $f(x,y) = x^3 - 3xy^2$

(3) $f(x,y) = x^2y^2$

2. $\mathbf{R}P^n$ の斉次座標を $[x_1 : \cdots : x_{n+1}]$ として，$f : \mathbf{R}P^n \to \mathbf{R}$ を

$$f(x_1, \cdots, x_{n+1}) = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n+1} x_j^2} \sum_{k=1}^{n+1} k\ x_k^2$$

で定める．f の臨界点はすべて非退化であることを示し，指数をそれぞれ求めよ．

3. $k \leq n$ とする. $\mathbf{R}^n$ の k 個のベクトルで, 長さが 1 で互いに直交するもの全体の集合を $V_{n,k}$ で表す.

(1) $f : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^3$ を $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ に対して

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\|\mathbf{x}\|^2, \|\mathbf{y}\|^2, \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle)$$

で定める. $(1,1,0)$ は f の正則値となることを示せ.

(2) 一般に、$V_{n,k}$ にコンパクト微分多様体の構造が入ることを示し, その次元を求めよ.

4. 正則値の引き戻しが可微分多様体になることを利用して，$SO(n)$ が可微分多様体になることを示し，その次元を求めよ．

5 $SL(n,\mathbf{R})$ は、$GL(n,\mathbf{R})$ の閉部分多様体であることを示せ。

6. 写像 $h: S^{n-1}\times S^{n-1}\to\mathbf{R}$ を

$$h((x_1,\cdots,x_n),(y_1,\cdots,y_n))=\sum_{j=1}^{n}x_jy_j$$

で定める．h の微分の階数および，一点の逆像の変化する状況を調べよ．

7. M,N を連結な可微分多様体，$f: M\to N$ を C^∞ 写像とする．ここでは，M はコンパクトで $m=n$ とする．f がはめ込みであるとき，以下を証明せよ．

(1) f は全射である．

(2) $y\in N$ に対して $f^{-1}(y)$ は有限集合で，その個数は y によらない．