幾何学I演習　6　はめ込みと埋め込み

1. $f : S^2 \to \mathbf{R}^3$ を
$$f(x,y,z) = (xy, x, y)$$
により定義する．この写像の各点における微分とそのランクを求めよ．

2. 無理数 α に対して $f_\alpha : \mathbf{R} \to S^1 \times S^1$ を
$$f_\alpha(t) = (e^{2\pi it}, e^{2\pi i\alpha t})$$
で定める．f は，はめ込みであるが埋め込みではないことを示せ．

3. $f : S^2 \to \mathbf{R}^4$ を
$$f(x,y,z) = (x^2 - y^2, 2xy, 2yz, 2zx)$$
により定義する．f が導く写像 $\overline{f} : \mathbf{R}P^2 \to \mathbf{R}^4$ は埋め込みであることを示せ．

4. $f : \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}$ を C^∞ 関数として，
$$V = \{(x_1, \cdots, x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid f(x_1, \cdots, x_{n+1}) = 0\ \}$$
とおく．$V \neq \emptyset$ として，V の任意の点 p において
$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(p)\right) \neq \mathbf{0}$$
が満たされるとき，V は $\mathbf{R}^{n+1}$ の部分多様体であることを示せ．また，V は n 次元可微分多様体として向き付け可能であることを示せ．

5. M は n 次元可微分多様体として，M の接ベクトル束を TM で表す．

(1) $\iota : M \to TM$ を M の各点 p に対して接空間 T_pM の零ベクトルを対応させることによって定義する．ι は埋め込みであることを示せ．

(2) TM は $2n$ 次元可微分多様体として向き付け可能であることを示せ．

6. n 次元球面 S^n から $\mathbf{R}^n$ への，はめ込みは存在しないことを示せ．

7. 可微分多様体 X の部分多様体 Y, Z が横断的に交わるとは，すべての $p \in Y \cap Z$ について

$$T_pX = T_pY + T_pZ$$

が成立することである．X の部分多様体 Y, Z が横断的に交わるとき，$Y \cap Z$ は X の部分多様体であることを示せ．

8. n 次元 Euclid 空間 V の k 次元線形部分空間全体を $G_{n,k}$ とおく．$G_{n,k}$ は微分多様体の構造をもつことを示し, その次元を求めよ．また, 埋め込み

$$f : G_{n,k} \to \mathbf{R}P^m, \quad m = {}_nC_k - 1$$

を構成せよ．ここで，$\mathbf{R}P^m$ は V の k 階外積から構成した射影空間である．