幾何学I演習　5　接ベクトル束，多様体の向きなど

1. S^1 の接ベクトル束は自明であることを示せ．

2. 実射影空間 $\mathbf{R}P^n$ は，n が奇数のとき向き付け可能であることを示せ．

3. n 次元球面

$$S^n = \{(x_1, \cdots, x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$$

に対して，

$$M_n = \{(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \in S^n \times \mathbf{R}^{n+1} \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle = 0,\ \|\mathbf{v}\| = 1\}$$

とおく．ここで，$\langle\ ,\ \rangle$ は $\mathbf{R}^{n+1}$ のユークリッド内積を表す．

(1) M_n はコンパクト $2n-1$ 次元可微分多様体の構造をもつことを示せ．

(2) M_2 は実射影空間 $\mathbf{R}P^3$ と微分同相であることを示せ．

4. p, q を互いに素な自然数とし，$\xi = e^{2\pi i/p}$ とおく．3 次元球面 S^3 を

$$S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$$

で与え，S^3 への p 次の巡回群 $G = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ の作用を $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ の生成元に対して

$$(z_1, z_2) \mapsto (\xi z_1, \xi^q z_2)$$

を対応させることにより定める．商空間 S^3/G はコンパクト 3 次元可微分多様体の構造をもつことを示せ．さらに，S^3/G は向き付け可能であることを示せ．