幾何学 I 演習　4．群作用と商多様体

1. 整数全体からなる群 $\mathbf{Z}$ を $\mathbf{R}$ に，平行移動

$$n \cdot x = x + n, \quad x \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{Z}$$

によって作用させる．商空間 $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ は S^1 と微分同相であることを示せ．

2. r を $r \neq 0, \pm 1$ を満たす実数とする．$\mathbf{Z}$ を $X = \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ に，

$$m \cdot x = r^m x, \quad x \in X, m \in \mathbf{Z}$$

によって作用させる．商空間 $X/\mathbf{Z}$ は $S^1 \times S^{n-1}$ と微分同相であることを示せ．

3. X は Hausdorff 空間とする．有限群 G が X に位相空間の変換群として作用するとき商空間 X/G は Hausdorff 空間であることを示せ．

4. 前回の問題 4 のように $\mathbf{R}^n$ の一次独立なベクトル $e_1, \cdots, e_n$ に対して

$$\Gamma = \{m_1 e_1 + \cdots + m_n e_n \mid m_1, \cdots, m_n \in \mathbf{Z}\}$$

とおくと，Γ は $\mathbf{R}^n$ に，平行移動として作用する．商空間を $T^n = \mathbf{R}^n/\Gamma$ とする．

(1) 射影を $p : \mathbf{R}^n \to T^n$ として，$x, y \in T^n$ に対して，$p(x_0) = x$, $p(y_0) = y$ となる $x_0, y_0 \in \mathbf{R}^n$ をとり，

$$d(x, y) = min_{g \in \Gamma} \|x_0 - g y_0\|$$

と定義する．d によって，T^n は距離空間となることを示せ．

(2) 上の距離によって，T^n は局所的にユークリッド空間の開球と合同であることを示せ．

5. $\mathbf{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ に同値関係 $\sim$ を以下のように定義する $x \sim y$ とは，0 でない複素数 λ があって，$y = \lambda x$ となることとする．この同値関係による商空間を $\mathbf{C}P^n$ で表し，複素射影空間とよぶ．

(1) $\mathbf{C}P^n$ は $2n$ 次元可微分多様体の構造をもつことを示せ．

(2) $\mathbf{C}P^1$ は S^2 と微分同相であることを示せ．

(3) $\mathbf{C}P^n$ を S^{2n+1} に対する S^1 の作用による商多様体として表せ．

6. 行列式が 1 の $n+1$ 次の直交行列全体 $SO(n+1)$ の S^n への自然な作用を考える．

(1) S^n の点 x における固定部分群 G_x を決定せよ．

(2) 商空間 $SO(n+1)/G_x$ は，S^n と微分同相であることを示せ．