幾何学 I 演習　3. 多様体間の写像とその微分

1. 写像 $\varphi : \mathbf{C} \setminus \{0\} \to \mathbf{C} \setminus \{0\}$ を

$$\varphi(z) = \frac{1}{z}$$

で定める．複素平面 $\mathbf{C}$ の共通部分をもたない和集合 $\mathbf{C} \cup \mathbf{C}$ において φ でうつりあう点を同一視して得られる商空間を $\widehat{\mathbf{C}}$ とおき，リーマン球面とよぶ．

(1) $\widehat{\mathbf{C}}$ は 2 次元可微分多様体の構造をもち，S^2 と同相であることを示せ．

(2) 複素数を係数とする多項式写像 $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

は C^∞ 写像 $\widehat{f} : \widehat{\mathbf{C}} \to \widehat{\mathbf{C}}$ に一意的に拡張されることを示せ．

(3) 多項式写像 $f(z) = z(z+1)$ をリーマン球面の間の C^∞ 写像 $\widehat{f}$ に拡張し，この写像の各点における微分とランクを求めよ．

2. M を n 次元可微分多様体として，$f : M \to M$ を C^∞ 級写像とする．M の点 p において微分 $(df)_p$ のランクは n とする．

(1) p を含む M の開集合 U で $f : U \to f(U)$ は微分同相写像となるものが存在することを示せ．

(2) 微分 $(df)_q$ のランクが n となるような M の点 q 全体の集合は M の開集合であることを証明せよ．

3. $j : S^n \to \mathbf{R}^{n+1}$ を包含写像とする．S^n の点 $p = (a_1, \cdots, a_{n+1})$ をとる．微分

$$(dj)_p : T_pS^n \to T_{j(p)}\mathbf{R}^{n+1}$$

は単射であることを示し，その像を $a_1, \cdots, a_{n+1}$ で表せ．

4. $\mathbf{R}^n$ の一次独立なベクトル $e_1, \cdots, e_n$ に対して

$$\Gamma = \{m_1e_1 + \cdots + m_ne_n \mid m_1, \cdots, m_n \in \mathbf{Z}\}$$

とおく.

(1) 商空間 $T^n = \mathbf{R}^n/\Gamma$ は可微分多様体の構造をもつことを示せ.

(2) 射影 $p : \mathbf{R}^n \to T^n$ のランクは各点で n であることを示せ．

5. $f : \mathbf{R}P^2 \to \mathbf{R}^3$ を

$$f([x : y : z]) = (xy, yz, zx)$$

で定義する。微分 $(df)_p$ の p によるランクが p によってどのように変化するかを調べよ．ただし，$x^2 + y^2 + z^2 = 1$ とする．