幾何学 I 演習　2．接空間と多様体上の関数の微分

1. xyz-空間内の単位球面 S^2 上の関数 $h : S^2 \to \mathbf{R}$ を

$$h(x, y, z) = z$$

で定める．$(dh)_p = 0$ となる $p \in S^2$ をすべて求めよ．

2. a_j, $1 \leq j \leq n+1$ を $a_1 < a_2 < \cdots < a_{n+1}$ を満たす実数とする．n 次元球面

$$S^n = \{(x_1, \cdots, x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$$

で定義された関数

$$f(x_1, \cdots, x_{n+1}) = \sum_{j=1}^{n+1} a_j x_j^2$$

に対して，$(df)_p = 0$ となる $p \in S^n$ をすべて求めよ．

3. 可微分多様体 M の点 p のまわりで定義されたなめらかな関数 f について，

$$(df)_p = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(p)\,(dx_i)_p$$

と表されることを示せ．ここで，$(x_1, \cdots, x_n)$ は p のまわりの M の局所座標で，$(dx_i)_p$ は，接空間 T_pM の基底 $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$ の双対基底である．また，上の式の右辺は局所座標のとりかたにはよらないことを，座標変換の公式から直接確かめよ．

4. xyz-空間内の楕円体

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

と平面 $\ell x+my+nz=0$ との交わりとして表される曲線上の点において $x^2+y^2+z^2$ の極値を求めよ．ただし，$\ell^2+m^2+n^2=1$ とする．

5. $p<n$ とする．条件

$$g_j(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0,\quad 1\le j\le p$$

における関数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ が極値をとる点を求める手法として，Lagrange の乗数法が知られている．Lagrange の乗数法を定式化し，これが実際に極値をとるための必要条件であることを，多様体上の関数の臨界点の立場から証明せよ．ただし，定式化においては，関数 $g_1,\cdots,g_p$ および f に対する仮定も必要に応じて述べよ．