幾何学 I 演習　11　多様体上のベクトル場とフロー

1. 次の多様体 M 上で定義されたベクトル場 X について，X が生成する 1 径数変換群 $\mathrm{Exp}(tX)$ を求めよ．また，ベクトル場が完備であるかどうかを述べよ．

(1)　$X = \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial}{\partial x_j}$　(a_j は定数, $M = \mathbf{R}^n$)

(2)　$X = \sum_{j=1}^{n} b_j x_j \frac{\partial}{\partial x_j}$　(b_j は定数, $M = \mathbf{R}^n$)

(3)　$X = \frac{\partial}{\partial x_1}$　($M = \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$)

2. $\mathbf{R}^n$ 上のベクトル場

$$X = \sum_{1 \le i,j \le n} a_{ij} x_j \frac{\partial}{\partial x_i}$$

に対して，X が生成する 1 径数変換群を行列 $A = (a_{ij})$ の指数写像を用いて表せ．

3. M を Riemann 多様体とする．M 上の C^∞ 関数 f について，任意のベクトル場 X に対して

$$Xf = g(X, Y)$$

を満たすベクトル場 Y を $\mathrm{grad}\ f$ で表す．ここで，g は Riemann 計量とする．

(1) 上のようなベクトル場 $\mathrm{grad}\ f$ は一意に存在することを示せ．また，$\mathrm{grad}\ f$ の局所座標による表示を与えよ．

(2) $M = S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ として，$\mathbf{R}^3$ のユークリッド計量から導かれる Riemann 計量を入れる．座標関数 z を S^2 上の関数とみなして，$\mathrm{grad}\ z$ を座標を用いて具体的に表せ．また，$\mathrm{grad}\ z = 0$ となる点を求め，その点のまわりでの $\mathrm{grad}\ z$ が生成するフローの様相を図示せよ．

4. n を奇数とする．射影空間 $\mathbf{R}P^n$ 上に至るところ零ではないベクトル場を構成せよ．

5. $M(n,\mathbf{R})$ を n 次の正方行列全体として

$$\mathrm{Exp}: M(n,\mathbf{R}) \to GL(n,\mathbf{R})$$

を行列の指数写像とする．

(1) $GL(n,\mathbf{R})$ の単位行列における接空間は曲線

$$\mathrm{Exp}(tX), \quad X \in M(n,\mathbf{R})$$

の $t=0$ における速度ベクトルで生成されることを示せ．

(2) 写像 $f: GL(n,\mathbf{R}) \to GL(n,\mathbf{R})$ を $f(A)=A^2$ で定める．f の単位行列における微分を求めよ．

6. G を Lie 群とする．接ベクトル束 TG は自明であることを示せ．S^3 は $SU(2)$ と微分同相であることを証明し，これを用いて TS^3 は自明であることを示せ．