

## 幾何学 I 演習 10 多様体のリーマン計量, 曲面の微分幾何

1. 3次元ユークリッド空間内のトーラス

$$x = (a \cos \theta + b) \cos \phi, \quad y = (a \cos \theta + b) \sin \phi, \quad z = a \sin \theta$$

$0 < a < b, 0 \leq \theta < 2\pi, 0 \leq \phi < 2\pi$  について, 3次元ユークリッドから誘導されるトーラスのリーマン計量を  $\theta, \phi$  で表せ.

2.  $f: S^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$  を標準的な埋め込みとするとき,  $f$  によってユークリッド計量から  $S^n$  に誘導されるリーマン計量を  $S^n$  の局所座標を用いて表せ.

3. 双曲面  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$  上の点  $(1, 0, 0)$  と  $(-1, 0, 0)$  を結ぶ曲線の長さの最小値を求めよ.

4. ユークリッド空間  $\mathbf{R}^n$  の  $C^1$  級曲線  $c: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^n$  に対して,

$$\int_0^1 \|c'(t)\| dt = \sup_{0=t_0 < \dots < t_m=1} \sum_{k=1}^m \|c(t_k) - c(t_{k-1})\|$$

を示せ.

5. 問1のようにパラメータ表示された3次元ユークリッド空間内のトーラスのガウス曲率と平均曲率を  $\theta, \phi$  を用いて表せ.

6.  $\mathbf{R}^3$  に Minkowski 内積

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3$$

を入れる. 双曲面

$$x^2 + y^2 - z^2 = -1, \quad z > 0$$

上に  $\mathbf{R}^3$  の Minkowski 内積から導かれる計量はリーマン計量であることを示し, この計量を  $x, y$  で表せ.

7. 楕円面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

のガウス曲率と平均曲率を求めよ.

8.  $xyz$  空間において懸垂線

$$x = \cosh z$$

を  $z$  軸の周りに一回転して得られる曲面のガウス曲率と平均曲率を求めよ.