幾何学 I 演習　1．多様体の定義と例

1. 次の式で定義される図形が，可微分多様体の構造をもつことをそれぞれ示せ．また，コンパクトであるかどうかも述べよ．

(1) 曲線　$x^2 + xy + y^2 = 1, \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2$

(2) 曲面　$x^2 + y^2 - z^2 = 1, \quad (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$

(3) 曲面　$a^2(x^2 + y^2) = (x^2 + y^2 + z^2 + 1)^2, \quad (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, $a > 2$

(4) $\mathbf{R}^{n+1}$ の超曲面　$\sum_{1 \leq i,j \leq n+1} a_{ij} x_i x_j = 1.$
ただし，$a_{ij} \in \mathbf{R}, a_{ij} = a_{ji}$ で行列 $A = (a_{ij})$ は正定値とする．

2. n 次元球面

$$S^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$$

について，ユークリッド空間 $\mathbf{R}^{n+1}$ の部分集合としての相対位相を入れる．$p^{\pm} = (0, \cdots, 0, \pm 1)$, $S^n - \{p^-\} = U^+$, $S^n - \{p^+\} = U^-$ とおいて，写像 $\varphi^{\pm} : U^{\pm} \to \mathbf{R}^n$ を第 j 成分が

$$\varphi_j^{\pm} = \frac{x_j}{1 \pm x_{n+1}}, \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

で表される写像とする．

(1) φ^+, φ^- はともに同相写像 (homeomorphism) であることを示せ．

(2) φ^+ の $U^+ \cap U^-$ への制限 $\varphi^+|_{U^+ \cap U^-}$ は $U^+ \cap U^-$ と $\mathbf{R}^n - \{0\}$ の同相を与えることを示せ．

(3) 写像の合成 $\varphi^-|_{U^+ \cap U^-} \circ (\varphi^+|_{U^+ \cap U^-})^{-1}$ は，微分同相 (diffeomorphism) であることを示せ．

3. M, N を可微分多様体とする．直積 $M \times N$ は直積位相について，可微分多様体の構造をもつことを示せ．

4. 各点が $\mathbf{R}^n$ の開集合と同相な近傍をもつが，Hausdorff ではない位相空間の例を挙げよ．

5. $\mathbf{R}^2$ において有理数を係数とする正則行列の作用でうつりあう点を同一視して得られる商空間 $\mathbf{R}^2/GL(2,\mathbf{Q})$ を X とする．

(1) X はコンパクトか．

(2) X は Hausdorff か．

6. 5 と同様の問を商空間

$$(\mathbf{R}^2 - \{0\})/GL(2,\mathbf{Z}), \quad \mathbf{R}^2/GL(2,\mathbf{Z})$$

に対して，それぞれ考察せよ．