9. 測地線と完備性など

測地線的完備性

M を Riemann 多様体とする．M が測地線的完備であるとは，M の任意の点 p において，$\exp_p$ がすべての $v \in T_pM$ に対して定義されることある．つまり，$\gamma(0) = p$ を満たす測地線が，すべての $t \in \mathbf{R}$ に対して定義されることである．

以下，M は連結な Riemann 多様体であるとする．$p_0 \in M$ を固定して，距離関数 $f(p) = \rho(p, p_0)$ を考えると，これは M 上の連続関数となる．

定理　次の (a) – (d) は同値である．

(a) M のある点 p について，$\exp_p$ はすべての $v \in T_pM$ に対して定義される．
(b) M の有界閉集合はコンパクトである．
(c) M は距離空間として完備である．
(d) M は測地線的完備である．

定理 (Hopf-Rinow)　M が測地的完備であるとすると，M の任意の 2 点 p, q について，これらを結ぶ測地線 γ が存在し，その長さは $\ell(\gamma) = \rho(p, q)$ で与えられる．

Cartan-Hadamard の定理

次の定理は Riemann 多様体の曲率の Riemann 多様体の位相幾何への応用の典型例である．

定理 (Cartan-Hadamard)　M は完備で単連結な n 次元 Riemann 多様体とする．M の断面曲率 $K(\Sigma)$ が，つねに $K(\Sigma) \leq 0$ をみたすならば

$$\exp_p : T_pM \longrightarrow M$$

は微分同相写像であり，とくに，M は $\mathbf{R}^n$ と可微分同相である．

証明は Jacobi 場の概念を用いて，後に与える．

測地線と変分法

M の区分的 C^∞ 級曲線 $c:[0,a]\longrightarrow M$ とその端点を結ぶ区分的 C^∞ 級曲線の族

$$f:(-\varepsilon,\varepsilon)\times[0,a]\longrightarrow M$$

を考える．ここで，$f(0,t)=c(t)$, $f(s,0)=c(0)$, $f(s,a)=c(a)$ である．$V(t)=\frac{\partial f}{\partial s}(0,t)$ は曲線 c に沿ったベクトル場を定め，これを変分ベクトル場とよぶ，上の曲線のエネルギー汎関数を s の関数とみて

$$E(s)=\int_0^a \|\frac{\partial f}{\partial t}(s,t)\|^2 dt$$

とおく．

補題 γ を M の 2 点 p,q を結ぶ極小測地線とする．このとき p,q を結ぶ任意の区分的 C^∞ 級曲線 $c:[0,a]\longrightarrow M$ のエネルギー $E(c)$ に対して

$$E(\gamma)\leq E(c)$$

が成立する．等号成立は c が極小測地線のときである．

定理 (第一変分公式)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}E'(0)=&-\int_0^a \langle V(t),\frac{D}{dt}\frac{dc}{dt}\rangle dt\\ &-\sum_i\langle V(t_i),\frac{dc}{dt}(t_i^+)-\frac{dc}{dt}(t_i^-)\rangle\end{aligned}$$

ここで，最後の項は t_i における右微分係数と左微分係数を表す．

命題 M の区分的 C^∞ 級曲線 $c:[0,a]\longrightarrow M$ が測地線であることは，端点を固定するすべての変分について $E'(0)=0$ を満たすこと同値である．

つまり，p,q を結ぶ区分的 C^∞ 級曲線全体の空間において測地線はエネルギー汎関数の臨界点である．