8. 測地線の極小性と Riemann 多様体上の距離

測地線の長さの極小性

M を Riemann 多様体として，M の点 p において，測地座標の節で述べた性質を満たす近傍 W と $\varepsilon > 0$ をとる．

定理 $\gamma : I \longrightarrow M$ を W の 2 点を結ぶ長さが ε より小さい測地線とする．$\omega : I \longrightarrow M$ をこれらの点を結ぶ区分的に滑らかな曲線とすると，それらの長さについて

$$l(\gamma) \leq l(\omega)$$

が成立する．等号が成立するのは，集合として $\gamma(I)$ が $\omega(I)$ に一致するときである．

上の定理の証明には次の補題を用いる．

補題 $q \in W$ のまわりの測地座標 U_q において，$0 < r < \varepsilon$ として

$$S_r = \{ \ exp_q(v) \mid v \in T_qM, \ \|v\| = r \ \}$$

とおくと，q を通る測地線は S_r に直交する．

定理の系として，次の測地線の極小性が成立する．

系 長さによってパラメータ付けされた曲線 $\gamma : [0, l] \longrightarrow M$ の長さが $\gamma(0)$ と $\gamma(l)$ を結ぶ任意の区分的に滑らかな曲線の長さ以下であるとき，γ は測地線である．

上の系の性質を満たす測地線を極小であるという．定理により，局所的には測地線はつねに極小であるが，大域的には測地線は必ずしも極小であるとは限らない．

M を連結な Riemann 多様体とするとき，$p, q \in M$ に対して p, q を結ぶ区分的に滑らかな曲線 γ の長さの下限として

$$\rho(p, q) = \inf \ l(\gamma)$$

とおく．このとき，ρ は距離関数を定め，これにより M は距離空間の構造をもつ．

測地線の例

(双曲平面)　上半平面

$$\mathbf{H} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y > 0\}$$

に，Riemann 計量

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

を入れた双曲平面を考える．測地線の極小性による特徴付けにより，y 軸上の線分

$$\gamma(t) = (0, t) \quad a \leq t \leq b, a > 0$$

は，測地線の像であることが確かめられる．上半平面の 1 次分数変換

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc = 1$$

は双曲平面の計量を保ち，上の測地線のこの変換による像は測地線となる．これらは x 軸と直交する半円または半直線である．

($\mathbf{R}^3$ 内のパラメータ付けられた曲面)　$\mathbf{p}(u^1, u^2)$ を曲面 S のパラメータ表示とする．$\mathbf{n}$ を単位法線ベクトルとして

$$\frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial u^i \partial u^j} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u^k} + h_{ij} \mathbf{n}$$

とおくと，Γ_{ij}^k は Riemann 接続を定める．S 上の曲線 γ が測地線であることは，その加速度ベクトルが法線方向であることと同値である．