7. 測地線と測地座標

測地線の存在と一意性

Riemann 多様体 M の C^∞ 級曲線 $\gamma : I \longrightarrow M$ が測地線であるとは

$$\frac{D}{dt}\frac{d\gamma}{dt} = 0$$

が満たされることである．ここで，

$$\frac{d}{dt}\langle\frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt}\rangle = 2\langle\frac{D}{dt}\frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt}\rangle = 0$$

が成立し，速度ベクトルの大きさはつねに一定である．速度ベクトルの大きさがつねに 1 となるパラメータ表示は弧長によるパラメータ付けを与える．測地線は 2 階の微分方程式系

$$\frac{d^2x^k}{dt^2} + \sum_{i,j}\Gamma^k_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt} = 0, \quad k = 1, \cdots, n$$

の解として表される．この方程式を接バンドル TM 上の 1 階の常微分方程式系

$$\begin{cases} \frac{dx^k}{dt} = y^k \\ \frac{dy^k}{dt} = -\sum_{i,j}\Gamma^k_{ij}y^iy^j \end{cases}$$

として表し，常微分方程式の解の存在と一意性定理を用いることにより，次が得られる．

命題　M の各点 p に対してある近傍 U と $\varepsilon > 0$ が存在して，すべての $q \in U$ と $\|v\| < \varepsilon$ となる v について，測地線 $\gamma_v : (-2, 2) \longrightarrow M$ で

$$\gamma_v(0) = q, \quad \frac{d\gamma_v}{dt}(0) = v$$

を満たすものが一意に存在する．

上の命題の測地線 γ_v について

$$exp_q(v) = \gamma_v(1)$$

とおく．

測地座標

命題 M の各点 p に対してある近傍 W と $\varepsilon > 0$ が存在して，次の (1), (2) を満たす．

(1) W の任意の 2 点は長さが ε よりも小さい測地線で一意的に結ばれる．

(2) 任意の $q \in W$ について，写像 exp_q は T_qM の開球 $B_\varepsilon(0)$ からの中への可微分同相

$$exp_q : B_\varepsilon(0) \longrightarrow M$$

を定める．

上の写像 $exp_q : B_\varepsilon(0) \longrightarrow M$ が定める q のまわりの M の局所座標を測地座標とよぶ．測地座標について

$$\Gamma_{ij}^k(0) = 0$$

が成立する．