6. 断面曲率，Ricci 曲率など

5 節と同様に M を Riemann 多様体とし，Riemann 計量と両立する対称な接続 (Riemann 接続) が与えられているとする．

断面曲率

一般に V を内積の入った線形空間として，$x, y \in V$ に対して

$$|x \wedge y| = \sqrt{|x|^2|y|^2 - \langle x, y\rangle^2}$$

とおく．これはベクトル x, y の張る平行四辺形の面積を表す．

Riemann 多様体の点 p における接空間 T_pM の 2 次元部分空間を Σ として，x, y を Σ の基底とする．このとき，

$$K(x, y) = -\frac{R(x, y, x, y)}{|x \wedge y|^2}$$

は基底のとりかたによらず Σ によって定まる．ここで，

$$R(x, y, x, y) = \langle R(x, y)x, y\rangle$$

である．$K(x, y) = K(\Sigma)$ とおき，これを M の p における断面曲率 (sectional curvature) とよぶ．断面曲率は，Σ の要素を初速度ベクトルとする測地線の張る曲面のガウス曲率と考えることができる．

Riemann の曲率テンソルは，5 で述べた対称性と，すべての 2 次元部分空間 $\Sigma \subset T_pM$ に対する断面曲率 $K(\Sigma)$ によって完全に決まる．断面曲率が至る所一定であるような Riemann 多様体を定曲率多様体という．

例 1. $\mathbf{R}^{n+1}$ 内の単位球面 S^n にユークリッド計量から導かれる Riemann 計量を入れると，S^n の断面曲率はつねに 1 である．

例 2. $\mathbf{R}^n$ の上半空間

$$\mathbf{H}^n = \{(x^1, \cdots, x^n) \in \mathbf{R}^n \mid x_n > 0\}$$

に Riemann 計量

$$ds^2 = \frac{(dx^1)^2 + \cdots + (dx^n)^2}{(x^n)^2}$$

を入れたものを双曲空間とよぶ．双曲空間 $\mathbf{H}^n$ の断面曲率はつねに -1 である．

Ricci 曲率とスカラー曲率

Riemann 多様体に対して，双線形形式

$$Q : T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbf{R}$$

を次のように定める．$x, y \in T_pM$ に対して $Q(x, y)$ を対応

$$z \mapsto R(x, z)y$$

で定まる線形写像のトレースと定める．Riemann の曲率テンソルの対称性から $Q(x, y) = Q(y, x)$ が成り立つ．この対称双線形形式 Q を Ricci 曲率という．

Riemann の曲率テンソルの局所座標による表示

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^k} = \sum_{\ell} R^{\ell}_{ijk}\frac{\partial}{\partial x^{\ell}}$$

を用いて Ricci 曲率

$$R_{ik} = Q\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right)$$

は次のように表される．

$$R_{ik} = \sum_{j} R^{j}_{ijk} = \sum_{j,\ell} R_{ijk\ell}\, g^{\ell j}$$

ある定数 λ が存在して Ricci 曲率がつねに

$$R_{ij} = \lambda g_{ij}$$

を満たす Riemann 多様体を Einstein 多様体という．

Ricci 曲率を縮約して

$$K = \sum_{i,k} R_{ik}\, g^{ik}$$

とおいたものをスカラー曲率とよぶ．