5. Riemann の曲率テンソル

M を Riemann 多様体とし，Riemann 計量と両立する対称な接続 (Riemann 接続) が与えられているとする．Riemann-Christoffel 記号 Γ_{ij}^k は Riemann 計量を用いて表される．

Riemann の曲率テンソルの定義

曲率作用素 R を用いて，Riemann の曲率テンソル R_{ijk}^ℓ を

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^k} = \sum_\ell R_{ijk}^\ell \frac{\partial}{\partial x^\ell}$$

で定める．曲率形式との関係は

$$\Omega_k^\ell = \frac{1}{2}\sum R_{ijk}^\ell \, dx^i \wedge dx^j$$

である．

Riemann の曲率テンソルを Riemann-Christoffel 記号を用いて表すと

$$R_{ijk}^s = \frac{\partial}{\partial x^i}\Gamma_{jk}^s - \frac{\partial}{\partial x^j}\Gamma_{ik}^s + \sum_\ell \left(\Gamma_{jk}^\ell \Gamma_{i\ell}^s - \Gamma_{ik}^\ell \Gamma_{j\ell}^s\right)$$

となる．

平坦な多様体

すべての点で曲率テンソル R_{ijk}^ℓ が 0 になる Riemann 多様体を平坦 (flat) であるという．ユークリッド計量を入れた $\mathbf{R}^n$ は平坦である．n 次元トーラスについて T^n 自然な射影

$$\pi : \mathbf{R}^n \longrightarrow T^n$$

から導かれる局所ユークリッド計量を入れると T^n は平坦である．

曲率の対称性

M 上のベクトル場 X, Y, Z, W について

$$R(X,Y,Z,W) = \langle R(X,Y)Z, W\rangle$$

とおく．曲率は次のような対称性をもつ．

1. (Bianchi の等式)　$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$
2. $R(X,Y,Z,W) = -R(Y,X,Z,W)$
3. $R(X,Y,Z,W) = -R(X,Y,W,Z)$
4. $R(X,Y,Z,W) = R(Z,W,X,Y)$

曲率テンソルの記号を用いるとこれは次のように表される．

1. $R^{\ell}_{ijk} + R^{\ell}_{jki} + R^{\ell}_{kij} = 0$
2. $R_{ijk\ell} = -R_{jik\ell}$
3. $R_{ijk\ell} = -R_{ij\ell k}$
4. $R_{ijk\ell} = R_{k\ell ij}$

2 次元の場合

2 次元 Riemann 多様体については，自明でない曲率テンソルは R_{1212} であり，Gauss 曲率 κ との関係は

$$\kappa = -\frac{R_{1212}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$$

となることが知られている．

[訂正] 3．双曲平面のところで零にならない Riemann-Christoffel 記号として

$$\Gamma^2_{11} = \frac{1}{y}$$

を追加．