4. ベクトル束の接続と曲率

曲率の定義

M を可微分多様体とし，$\pi : E \longrightarrow M$ をその上の C^∞ 級ベクトル束とする．E の C^∞ 級切断全体を $\Gamma(E)$ で表す．E 上の接続

$$D : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(T^*M \otimes E)$$

が与えれているとする．このとき，線形写像

$$\widehat{D} : \Gamma(T^*M \otimes E) \longrightarrow \Gamma(\wedge^2 T^*M \otimes E)$$

で，Leibniz の規則

$$\widehat{D}(\theta \otimes s) = d\theta \otimes s - \theta \wedge Ds$$

を満たすものが一意的に定まる．

切断 $s \in \Gamma(E)$ に対して

$$Ks = \widehat{D}(Ds)$$

とおく．Ks の $x \in M$ における値は $s(x)$ のみによる．K を接続 D の曲率テンソルとよぶ．曲率テンソルは M 上の C^∞ 級関数 f に対して

$$K(fs) = fKs$$

を満たす．

曲率の局所的な表示

接続を局所枠 $\{s_i\}$ に対して

$$Ds_i = \sum_i \omega_i^j \otimes s_j$$

と局所的に表示すると，曲率テンソルは 2 次微分形式

$$\Omega_i^j = d\omega_i^j - \sum_k \omega_i^k \wedge \omega_k^j$$

を用いて

$$Ks_i = \sum_j \Omega_i^j \otimes s_j$$

と表される．これを行列 $\Omega = (\Omega_i^j)$, $\omega = (\omega_i^j)$ を用いて表示すると

$$\Omega = d\omega - \omega \wedge \omega$$

となる．別の局所枠についての曲率テンソルの行列表示を Ω' とすると，局所枠の変換行列を A として

$$\Omega' = A\Omega A^{-1}$$

が成立する．

曲率作用素

M 上の C^∞ 級ベクトル場 X, Y に対して，曲率テンソルから線形写像

$$R(X,Y) : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E)$$

が $R(X,Y)s = (Ks)(X,Y)$ によって定まる．局所的に $s \in \Gamma(E)$ を $s = \sum_i f^i s_i$ と表すと，$R(X,Y)$ の表示は

$$R(X,Y)s = \sum_{i,j} f^i \Omega_i^j(X,Y) s_j$$

で与えられる．$R(X,Y)$ を曲率作用素とよぶ．これは，共変微分を用いて

$$R(X,Y) = \bigtriangledown_X \bigtriangledown_Y - \bigtriangledown_Y \bigtriangledown_X - \bigtriangledown_{[X,Y]}$$

とも表される．

Bianchi の等式

曲率テンソル Ω は Bianchi の等式

$$d\Omega = \omega \wedge \Omega - \Omega \wedge \omega$$

を満たす．