3．接続と測地線の計算例

n 次元球面

$\mathbf{R}^{n+1}$ 内の n 次元球面

$$S^n = \{\mathbf{x} = (x^1, \cdots, x^{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid \|\mathbf{x}\| = 1\}$$

に，ユークリッド計量から導かれる Riemann 計量を入れると

$$g_{ij} = \delta_{ij} + \frac{x^i x^j}{(x^{n+1})^2}$$

となる．これを用いて Riemann-Christoffel 記号は

$$\Gamma^{\ell}_{ij} = x^{\ell}\left(\delta_{ij} + \frac{x^i x^j}{(x^{n+1})^2}\right)$$

と表される．S^n 上の測地線 $\xi(t)$ の満たす方程式は

$$\frac{d^2\xi(t)}{dt^2} = -\xi(t)$$

である．初期条件 $\xi(0) = (a^1, \cdots, a^n, 0)$ を満たす測地線は

$$\xi(t) = (a^1 \sin t, \cdots, a^n \sin t, \cos t)$$

となる．

双曲計量

上半平面

$$\mathbf{H} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y > 0\}$$

に，Riemann 計量

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

を入れ，これを双曲平面という．零でない Riemann-Christoffel 記号は

$$\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \Gamma^2_{22} = -\frac{1}{y}, \quad \Gamma^2_{11} = \frac{1}{y}$$

となる．測地線の満たす微分方程式は

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{2}{y}\frac{dx}{dt}\frac{dx}{dt^2} = 0$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1}{y}\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right) = 0$$

となり，この解は a, b, c を定数として

$$x = a\tanh ct + b, \quad y = \frac{a}{\cosh ct}$$

または，

$$x = a, \quad y = e^{ct}$$

で与えられる．これは，x 軸に直交する半円または半直線である．

双曲平面の計量は $SL(2, \mathbf{R})$ による 1 次分数変換で不変であり，非ユークリッド幾何学のモデルを与える．