12．部分多様体の曲率

$\mathbf{R}^3$ 内の曲面

$\mathbf{p}(u^1,u^2)$ を曲面 S のパラメータ表示とする．$\mathbf{n}$ を単位法線ベクトルとして

$$\frac{\partial^2\mathbf{p}}{\partial u^i\partial u^j}=\sum_k \Gamma_{ij}^k\frac{\partial\mathbf{p}}{\partial u^k}+h_{ij}\mathbf{n}$$

とおくと，Γ_{ij}^k は Riemann 接続を定める．法線方向の成分 h_{ij} を第 2 基本形式という．Riemann 曲率との関係は

$$R_{1212}=-(h_{11}h_{22}-h_{12}^2)$$

で与えられる．Gauss 曲率 κ の定義は

$$\kappa=\frac{h_{11}h_{22}-h_{12}^2}{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}$$

であるから，Gauss 曲率は Riemann 計量によって完全に決まることが分かる．

部分多様体の接続

$M\subset\mathbf{R}^{n+k}$ を n 次元部分多様体とし，接バンドル TM と法バンドル $T^{\perp}M$ を考える．X を M 上のベクトル場として，これを M から $\mathbf{R}^{n+k}$ への写像とみなす．このとき，接バンドルと法バンドルの直和分解にしたがって

$$dX=DX+A_X$$

と表すと，D は M の Riemann 接続を定める．$A:TM\times TM\longrightarrow T^{\perp}M$ を $A(X,Y)=A_X(Y)$ で定める．A を M の第 2 基本形式という．このとき，接続 D の曲率と第 2 基本形式について次が成立する．

定理 (Gauss の方程式)　M 上のベクトル場 X,Y,Z,W について

$$\begin{aligned}&\langle R(X,Y)Z,W\rangle\\=&\langle A(Z,X),A(W,Y)\rangle+\langle A(Z,Y),A(W,X)\rangle\end{aligned}$$

が成り立つ．

超曲面の曲率

$k=1$ の場合，M の局所座標を $(x^1,\cdots,x^n)$, 単位法線ベクトルを $\mathbf{n}$ として

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right)=h_{ij}\mathbf{n}$$

とおく．Gauss の方程式より Riemann 曲率との関係は

$$R_{ijkl}=-(h_{ik}h_{jl}-h_{il}h_{jk})$$

となる．行列 $H=(h_{ij})$ の固有値 $\kappa_1,\cdots,\kappa_n$ を超曲面 M の主曲率とよぶ.

曲面のガウス写像

$\mathbf{R}^3$ 内に埋め込まれた曲面 M について，正規直交枠を e_1,e_2 とし，その双対枠を θ_1,θ_2 とおく．Riemann 計量は $ds^2=\theta_1^2+\theta_2^2$ で与えられる．ここで，法線ベクトル e_3 を $e_3=e_1\times e_2$ で定めて，

$$de_i=\sum_j \omega_{ij}e_j,\quad i,j=1,2,3$$

構造方程式より

$$\begin{aligned}
d\theta_1&=\omega_{12}\wedge\theta_2\\
d\theta_2&=\omega_{21}\wedge\theta_2,\quad \omega_{12}+\omega_{21}=0\\
d\omega_{12}&=-\kappa\,\theta_1\wedge\theta_2=-\kappa\,dv
\end{aligned}$$

となる．M の各点 x に対して，x のおける法線ベクトル e_3 の終点を対応させて得られる

$$G:M\longrightarrow S^2$$

を Gauss 写像とよぶ．単位球面 S^2 の体積要素を $d\sigma$ とすると

$$G^*d\sigma=\kappa\,\theta_1\wedge\theta_2$$

が成立する．