11．構造方程式と Gauss-Bonnet の定理

構造方程式

M を可微分多様体として，$D : \Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma(T^*M \otimes TM)$ をアファイン接続とする．$e_1, \cdots, e_n$ を TM の局所的な枠，$\theta^1, \cdots, \theta^n$ を T^*M の双対枠とする．捩じれテンソル

$$T(X, Y) = \bigtriangledown_X Y - \bigtriangledown_Y X - [X, Y], \quad X, Y \in \Gamma(TM)$$

を TM に値をもつ 2 次微分形式とみなして

$$T = \sum_i \Theta^i e_i$$

と表す．接続形式 ω^i_j を $De_i = \sum_j \omega^i_j e_j$ で定めると，次の関係式が成立する．

$$\Theta^i = d\theta^i + \sum_j \omega^i_j \wedge \theta^j \tag{1}$$

$$\Omega^i_j = d\omega^i_j + \sum_k \omega^i_k \wedge \omega^k_j \tag{2}$$

ここで，Ω^i_j は曲率形式である．上の (1), (2) は，それぞれ，第 1 構造方程式，第 2 構造方程式とよばれる．

M を Riemann 多様体とする．$g_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$ とおくと，Riemann 計量は

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij} \theta^i \otimes \theta^j$$

で表される．このとき Riemann 接続の接続形式は

$$d\theta^i + \sum_j \omega^i_j \wedge \theta^j = 0 \tag{3}$$

$$dg_{ij} = \sum_k (\omega^k_i g_{kj} + \omega^k_j g_{ik}) \tag{4}$$

を満たす．上の (3) は接続の対称性に，(4) は接続と Riemann 計量の両立性に，それぞれ対応する．とくに，$e_1, \cdots, e_n$ を正規直交枠とすると，接続行列 $\omega = (\omega^i_j)$ は交代行列である．

体積要素

Mを向きの付いたn次元Riemann多様体とする．$e_1, \cdots, e_n$を向きを与える局所正規直交枠とする．このとき，M上のn次微分形式dvで

$$dv(e_1, \cdots, e_n) = 1$$

を満たすものが一意的に存在する．dvをMの体積要素とよぶ．$g = \det(g_{ij})$とおくと，局所的には

$$dv = \sqrt{g}\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

と表示される．

Gauss-Bonnet の定理

定理 (Gauss-Bonnet) Mをコンパクトで向き付けられた2次元Riemann多様体とすると

$$\frac{1}{2\pi}\int_M \kappa\, dv = \chi(M)$$

が成立する．ここで，$\chi(M)$はMのEuler数である．

$\Omega_{ij} = \sum_k \Omega_i^k g_{kj}$とおく．曲率形式とGauss曲率，Riemannの曲率テンソルの関係は

$$\frac{\Omega_{12}}{\sqrt{g}} = \frac{R_{1212}}{g} dv = -\kappa\, dv$$

である．M上のなめらかな曲線γに沿った単位速度ベクトル場をa_1とし，a_1, a_2をMの向きに適合する正規直交枠とする．$k_g = \langle \frac{Da_1}{dt}, a_2 \rangle$を$\gamma$の測地的曲率とよぶ．$\Delta \subset M$をなめらかな曲線で囲まれた領域とすると，

$$\int_\Delta \kappa\, dv = 2\pi - \int_{\partial\Delta} k_g\, ds$$

が成立する．また，Δを内角が$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$, 辺が$\Gamma_1, \cdots, \Gamma_n$の多角形とすると，

$$\int_\Delta \kappa\, dv = 2\pi - \sum_i (\pi - \alpha_i) + \sum_i \int_{\Gamma_i} k_g\, ds$$

となる．