10. Jacobi 場とその応用

Jacobi 場

M を Riemann 多様体とする．$p \in M$ を通る測地線の族

$$f(s,t) = \exp_p tv(s), \quad 0 \le t \le 1,\ -\varepsilon < s < \varepsilon$$

をパラメータ付けられた曲面と考える．ここで $v(s)$ は接空間 T_pM の曲線で $v(0) = v$ とおく．測地線 $\gamma(t) = \exp_p tv$ に沿ったベクトル場 $J(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(t,0)$ は微分方程式

$$\frac{D^2}{dt^2}J + R(J,V)V = 0, \quad V(t) = \gamma'(t)$$

お満たす．この微分方程式を Jacobi 方程式という．測地線に沿ったベクトル場で Jacobi 方程式を満たすものを，Jacobi 場とよぶ．一般に，Jacobi 場は測地線族による変分ベクトル場として与えられることが知られている．Jacobi 場は, 初期条件 $J(0)$ と $J'(0) = \frac{D}{dt}J(0)$ によって一意的に定まる．$J(0) = 0$, $J'(0) = w$ を満たす，測地線 $\gamma(t)$ に沿った Jacobi 場は

$$J(t) = (d\exp_p)_{t\gamma'(0)}(tw)$$

で与えられる．

共役点

$\gamma : [0,a] \longrightarrow M$ を測地線とする．$\gamma(t_0)$, $0 < t_0 \le a$ が，γ に沿った $\gamma(0)$ の共役点であるとは，恒等的に零ではない Jacobi 場 J で $J(0) = J(t_0) = 0$ を満たすものが存在することである．共役点 $\gamma(t_0)$ の重複度とは，上のような Jacobi 場全体の空間の次元である．

命題 測地線 γ について $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$ とする．$q = \gamma(t_0)$ が γ に沿った p の共役点であることは $v_0 = t_0 v$ が $\exp_p$ の臨界点であることと同値である．またこのときの重複度は，$Ker\ (d\exp_p)_{v_0}$ の次元に等しい．

例 球面 S^n 上の点 p に対して，その対せき点 $-p$ は共役点で重複度は $n-1$ である．

命題 M は完備で単連結な n 次元 Riemann 多様体とする．M の断面曲率 $K(\Sigma)$ が，つねに $K(\Sigma) \leq 0$ をみたすならば M 上に互いに共役な 2 点は存在しない．また，$\exp_p : T_pM \longrightarrow M$ は局所微分同相写像である．

Cartan-Hadamard の定理の証明

定理 (Cartan-Hadamard) M は完備で単連結な n 次元 Riemann 多様体とする．M の断面曲率 $K(\Sigma)$ が，つねに $K(\Sigma) \leq 0$ をみたすならば

$$\exp_p : T_pM \longrightarrow M$$

は微分同相写像であり，とくに，M は $\mathbf{R}^n$ と可微分同相である．

証明の概略は次のように与えられる．上の命題の局所微分同相写像 $\exp_p : T_pM \longrightarrow M$ を用いて，これが局所イソメトリーとなるような計量を T_pM に入れる．この計量についての T_pM の原点を通る測地線は直線となり，T_pM は完備である．さらに，$\exp_p$ は局所イソメトリーであることから，$\exp_p$ は被覆写像となる．M は単連結であるから，$\exp_p : T_pM \longrightarrow M$ は微分同相写像となる．