1. ベクトル束とその接続

接続の定義

M を可微分多様体とし，$\pi : E \longrightarrow M$ をその上の C^∞ 級ベクトル束とする．E の C^∞ 級切断全体を $\Gamma(E)$ で表す．E 上の接続とは，線形写像

$$D : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(T^*M \otimes E)$$

であって，$s \in \Gamma(E)$ と M 上の C^∞ 級関数 $f \in C^\infty(M)$ に対して

$$D(fs) = df \otimes s + fDs$$

を満たすものである．

M 上の C^∞ 級ベクトル場 $X \in \Gamma(TM)$ に対して，

$$\bigtriangledown_X s = \langle Ds, X \rangle$$

とおく．$\bigtriangledown_X s$ は $\Gamma(E)$ の要素であり，これを s の X に沿った共変微分という．

とくに，$E = TM$ のとき，D をアフィン接続という．ベクトル場 X, Y に対して $\bigtriangledown_X Y$ を対応させると，双線形写像

$$\Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma(TM)$$

で，$f \in C^\infty(M)$ に対して，次の性質を満たすものが定まる．

$$\begin{aligned} \bigtriangledown_{fX} Y &= f \bigtriangledown_X Y \\ \bigtriangledown_X fY &= (Xf)Y + f \bigtriangledown_X Y \end{aligned}$$

$\bigtriangledown_X Y$ をベクトル場 Y の X についての共変微分という．

接続の局所的な表示

M の次元を n, E のファイバーの次元を q とする．M の座標近傍 U 上で，E の局所的な切断で各点で線形独立であるような $\{s_\alpha\}, 1 \leq \alpha \leq q$ をとる．これを E の局所フレームとよぶ．接続は局所的に定義された 1 次微分形式 ω_α^β を用いて

$$Ds_\alpha = \sum_\beta \omega_\alpha^\beta s_\beta$$

と表される．1次微分形式 ω_α^β を成分とする行列 ω を接続行列という．$\{s'_\alpha\}$ を別の局所フレームとして，変換行列 A を $s' = As$ で定めると s' に対応する接続行列 ω' は

$$\omega' = dA \cdot A^{-1} + A\omega A^{-1}$$

を満たす．

アフィン接続の場合には，局所座標を $(x^1, \cdots, x^n)$ として，

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}$$

と表される．Γ_{ij}^k を Riemann-Christoffel 記号という．ベクトル場 $X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $X = \sum_i Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ に対して，共変微分は

$$\nabla_X Y = \sum_k \left(\sum_i X^i \left(\frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + \sum_j \Gamma_{ij}^k Y^j \right) \right) \frac{\partial}{\partial x^k}$$

平行移動と測地線

ベクトル束 E の切断 s が接続 D について平行であるとは，つねに

$$Ds = 0$$

が満たされることである．

次にアフィン接続の場合を考える．M 上の C^∞ 曲線 $\xi(t)$ 上のベクトル場 $X(t) = \sum_i X^i(t) \frac{\partial}{\partial x^i}$ の曲線 $\xi(t)$ に沿った共変微分を

$$\frac{DX}{dt}(t) = \sum_k \left(\frac{dX^k}{dt} + \sum_{i,j} \frac{d\xi^i}{dt} X^j \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial}{\partial x^k}$$

で定める．ベクトル場 $X(t)$ が平行移動であることは，微分方程式系

$$\frac{dX^k}{dt} + \sum_{i,j} \frac{d\xi^i}{dt} X^j \Gamma_{ij}^k = 0, \quad k = 1, \cdots, n$$

で表される．速度ベクトル場が平行移動であるような曲線を測地線という．測地線は2階の微分方程式系

$$\frac{d^2\xi^k}{dt^2} + \sum_{i,j} \frac{d\xi^i}{dt} \frac{d\xi^j}{dt} \Gamma_{ij}^k = 0, \quad k = 1, \cdots, n$$

で表される．