非ユークリッド幾何学の発見
～現代の宇宙論へ～

河野俊丈

東京大学大学院数理科学研究科，Kavli IPMU

2018年7月7日

NHK講座「現代数学は何をめざすか　第4回」

この講義のテーマ

(1) 私たちがすんでいる空間は平坦なのか，曲がっているのか？

(2) 非ユークリッド幾何学の発見は，私たちの空間認識に何をもたらしたか？

(3) 空間が曲がっているとはどういうことか．それは空間の中にいても認識できるのか？

(4) 一様に広がった空間は全体として，どのようなかたちになりうるのか？　最新の幾何学の成果から何が分かるか．

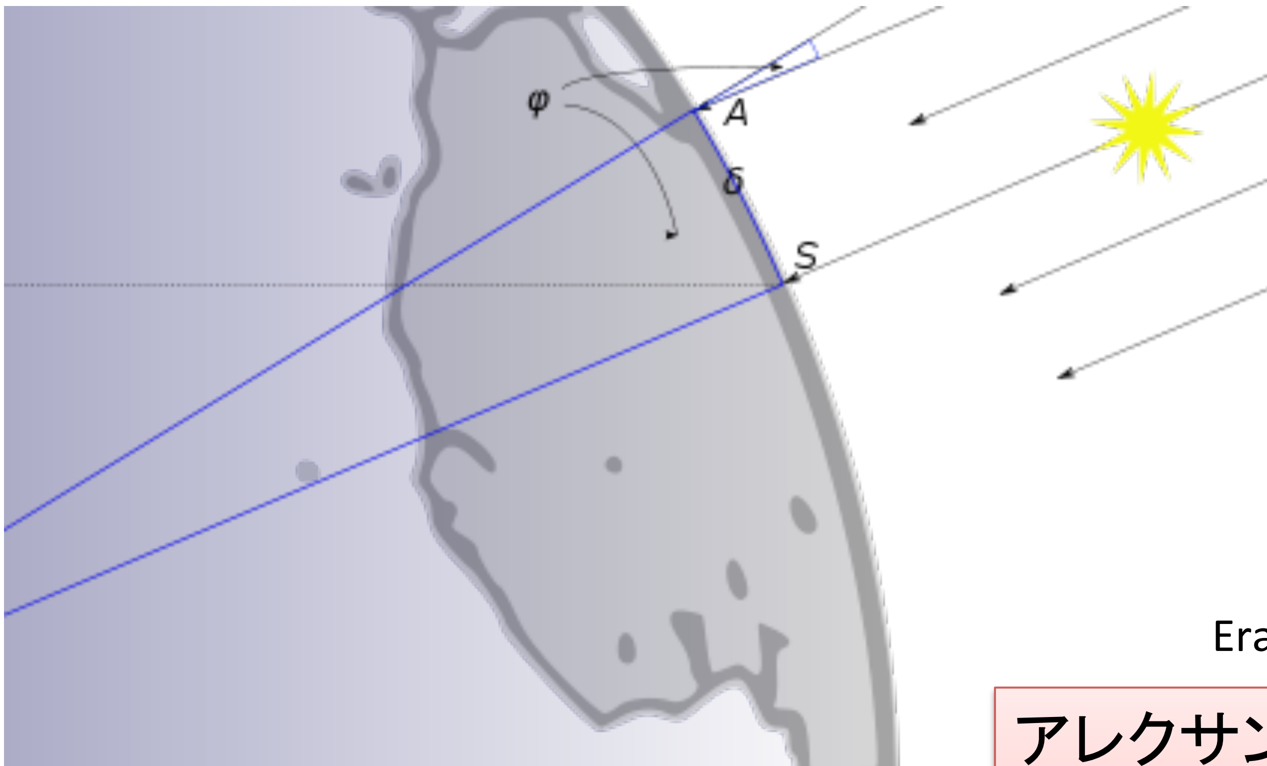
古代ギリシャでは大地が球形であることは広く認識されていた

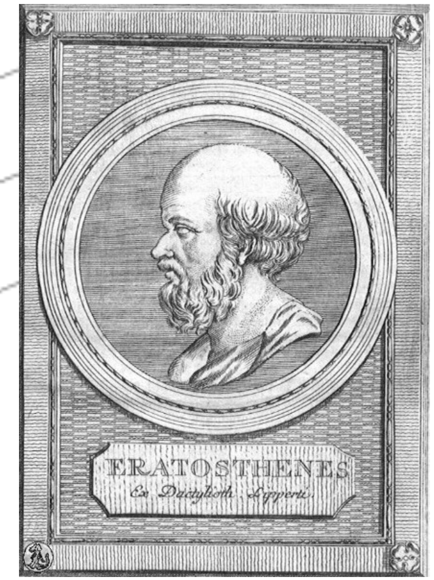
2018年1月31日の皆既月食

© T. Kohno

月食の連続写真から地球の影を見ることができる

エラトステネスによる地球の大きさの測定





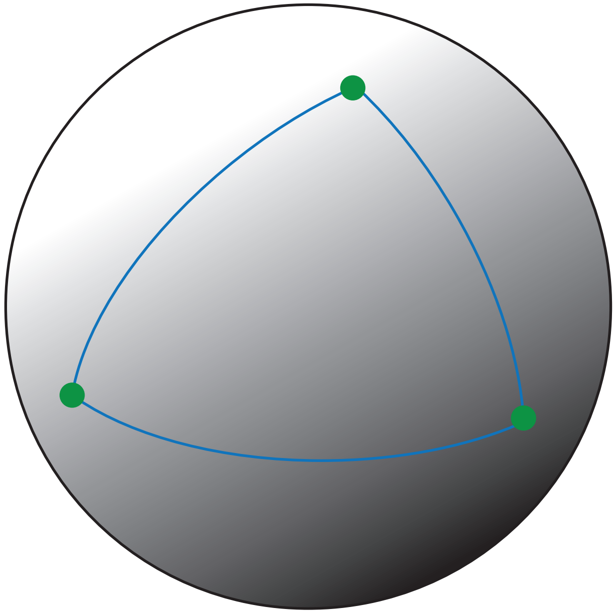
Eratosthenes, BC275-BC194

アレクサンドリアとその南にあるシエネでの南中時の太陽の高度差から地球の大きさを求めた.

地球の外からの視点を使わないで地球が球形であることをどのように認識できるか？

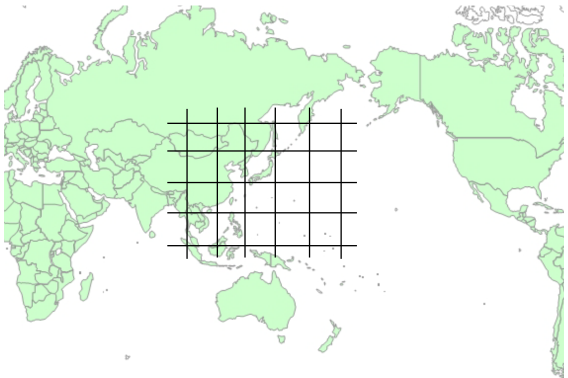
飛行機の航路は球の大円（測地線）

大円で囲まれた三角形（測地三角形）の内角の和は180度よりも大きい.



地球上で距離を測るためには，地図に表したときの縮尺
（それぞれの点で縦方向，横方向の縮小率と両者の角度の3つの情報が必要）
これを「計量」とよぶ.

計量とは各点で内積を与えること



内積の基本性質

内積 $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$

$\mathbf{a}, \mathbf{b}$ について双線型かつ対称

$\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle \geq 0,$

等号は $\mathbf{a} = 0$

地図に座標を導入する.

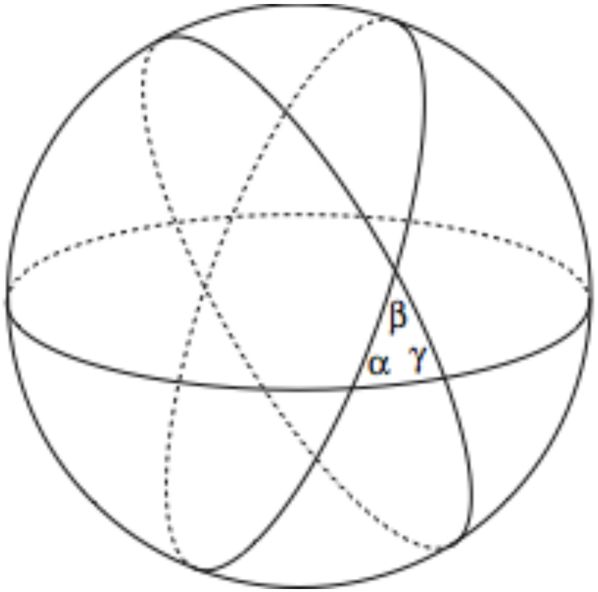
座標についての基本ベクトルの内積を実際の長さを表すように定める.

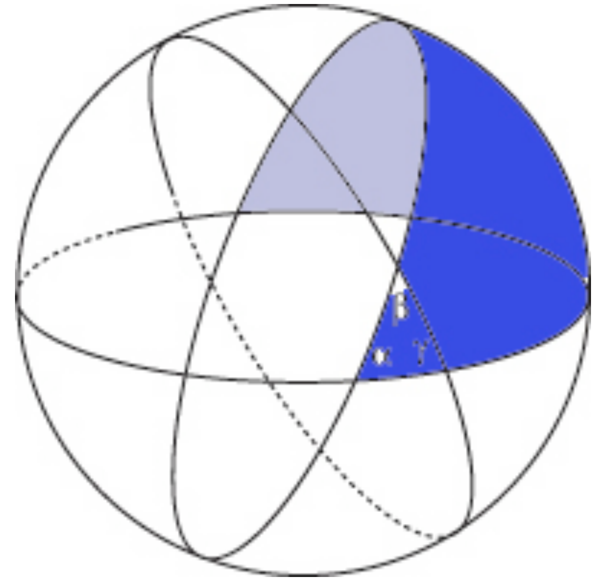
$$\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = g_{ij}, \;\; i, j = 1, 2$$

g_{11}, g_{22}, g_{12}

を地図上の関数とみなす.

球面3角形





球面三角形の面積 $\boxed{A = \alpha + \beta + \gamma - \pi}$

右の青く塗った部分の面積は 2α

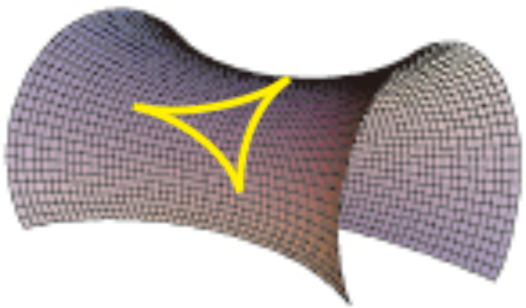
$$\alpha + \beta + \gamma > \pi$$

角度は弧度法で
表示する.

360°= 2π
180° = π

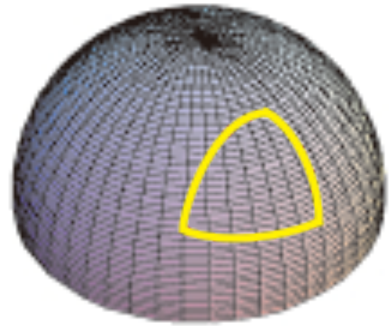
ガウス曲率と3角形の内角の和

3角形の内角の和＜180度

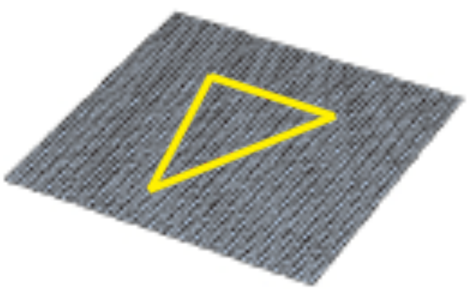


$K < 0$

3角形の内角の和＞180度



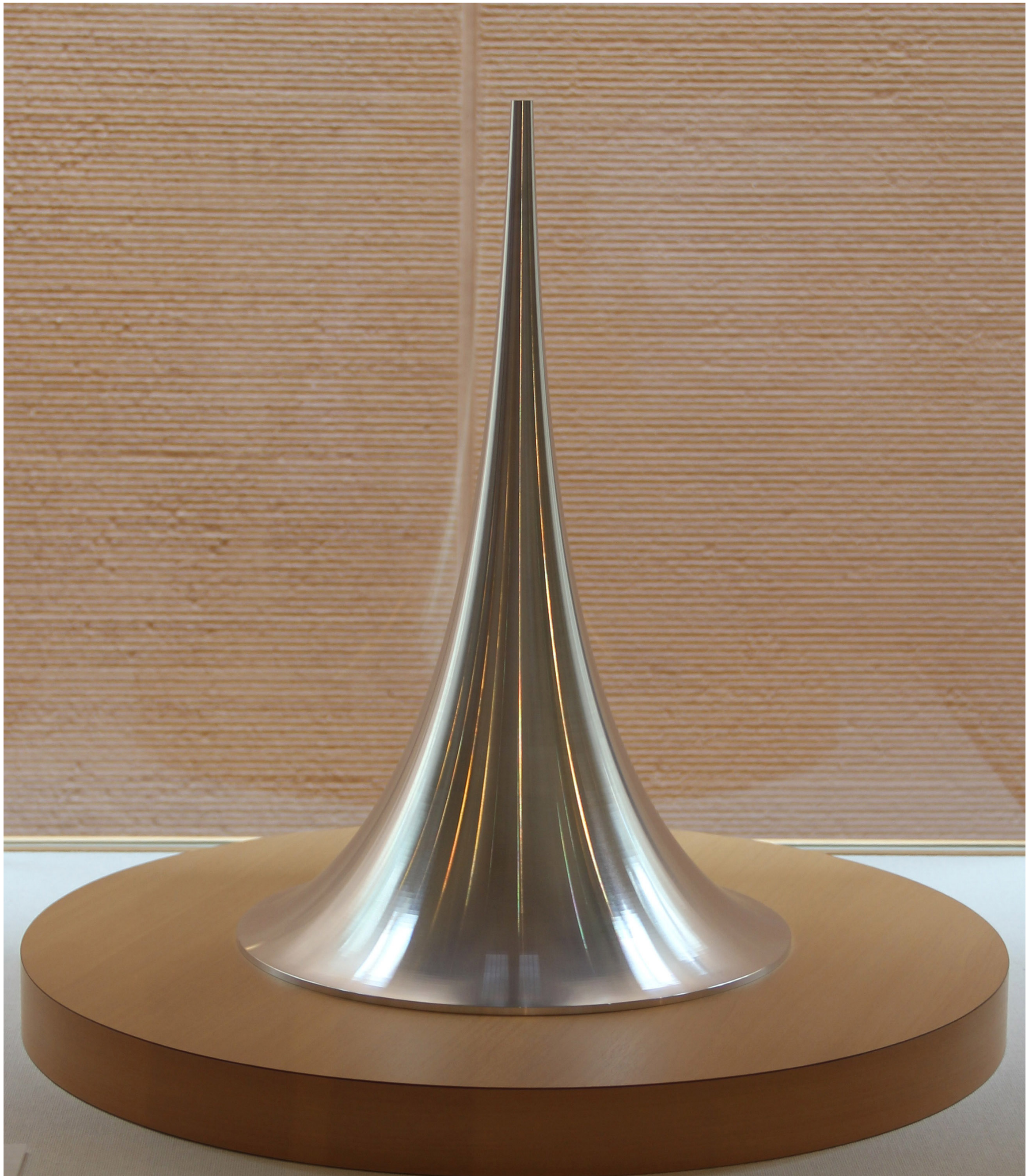
$K > 0$



$K = 0$

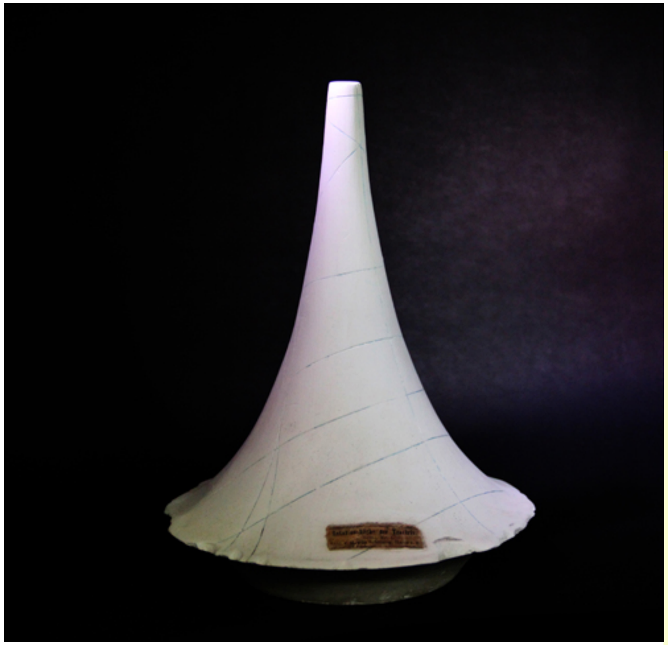
3角形の内角の和＝180度

Gauss 1777-1855



ガウス曲率が負の
一定値をとる曲面
の模型
（東大数理所蔵）

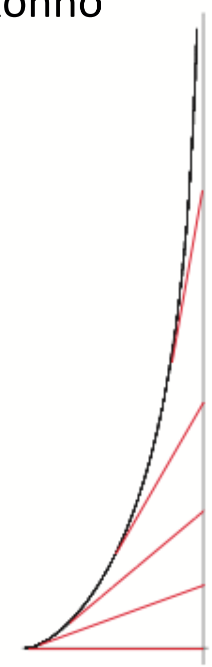
制作：ヤマダ精機



© T. Kohno

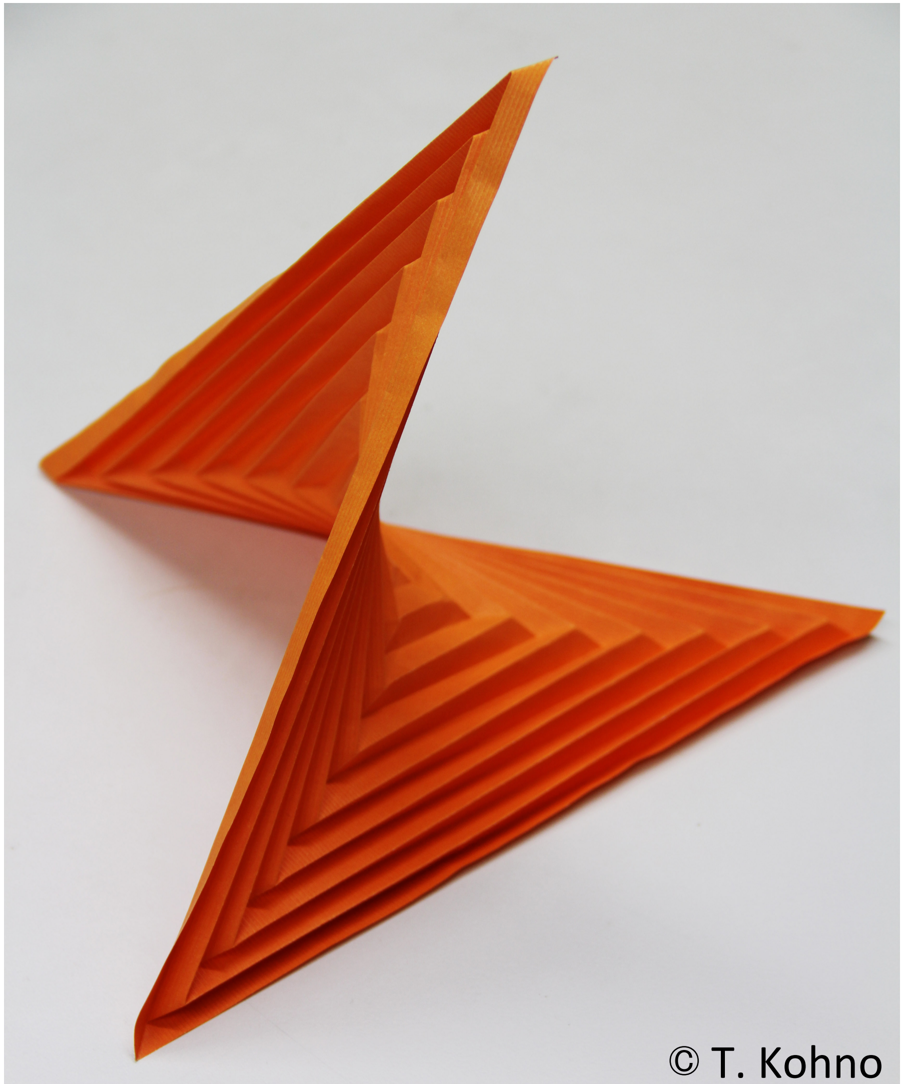
擬球 – 負の定曲率曲面

$$x = \frac{\cos u}{\cosh v}$$
$$y = \frac{\sin u}{\cosh v}$$
$$z = v - \tanh v$$
$$(0 \leq u < 2\pi, \quad 0 \leq v < \infty)$$



トラクトリクスの回転面

折り紙による双曲放物面



負の曲率をもつ曲面

フラットな平面を折ることによって
近似されている.

交わった2つの放物線が見える.

ユークリッド原論の公理

- 2点を結ぶ直線がただ一つ存在する.
- 直線は両側にいくらでものばせる.

いくらのばしても互いに交わらない2直線は平行であるという.

平行線についての第5公準

2直線と交わる1本の直線が同じ側につくる内角の和が2直角よりも小さいならば，2直線をその側にのばせば，どこかで交わる.

平行線についての第5公準は他の公理から証明できるか？

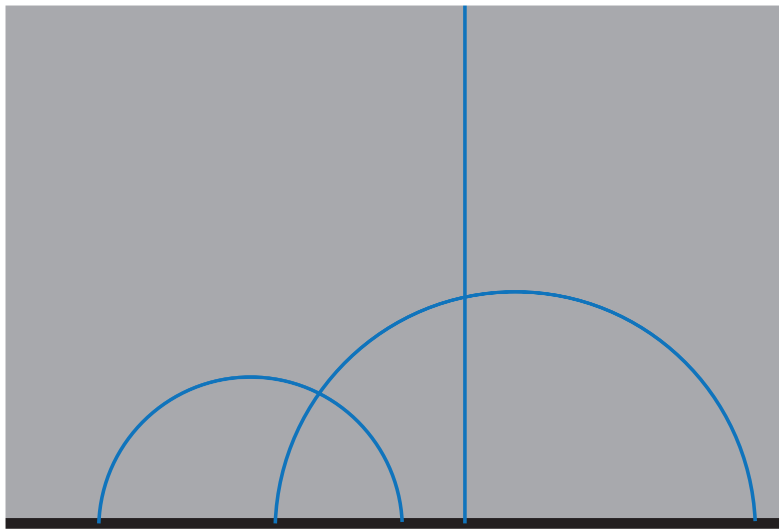
非ユークリッド幾何学の発見

1830年頃，ロバチェフスキーとボヤイによって，「平行線についての第5公準」は満たさないが，ユークリッド原論の他の公準は満たす幾何学の体系が存在することが示された．

J. Boyai

N. Lobachevsky

非ユークリッド幾何学のモデル



y>0

ベルトラミ，ポアンカレ，
クライン，．．．

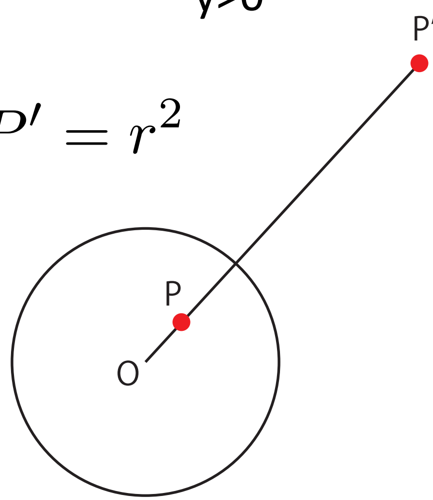
上半平面モデル

$$g_{11} = g_{22} = \frac{1}{y^2}$$

$$g_{12} = 0$$

測地線は x軸と直交する半円または
半直線

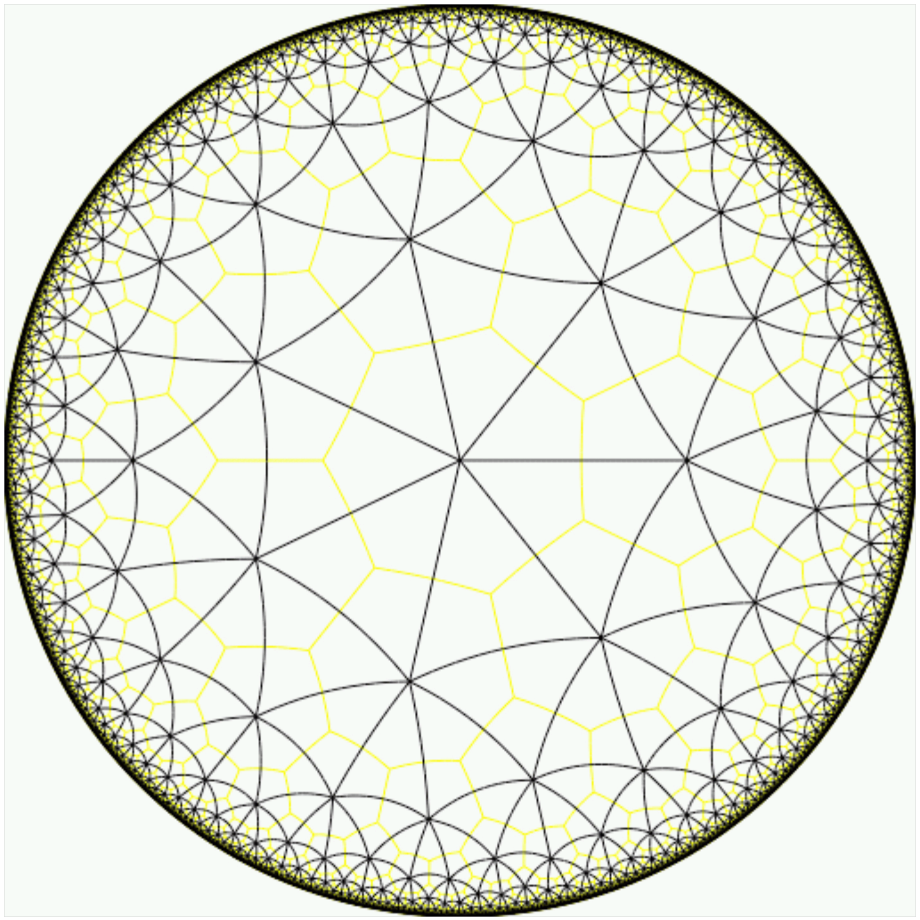
$$OP \cdot OP' = r^2$$



半径 r の円についての反転

測地線に関する反転によって距離
は変わらない．

双曲幾何のモデル
ポアンカレ円板 (双曲平面)



測地線は無限遠の円周と直交する円弧

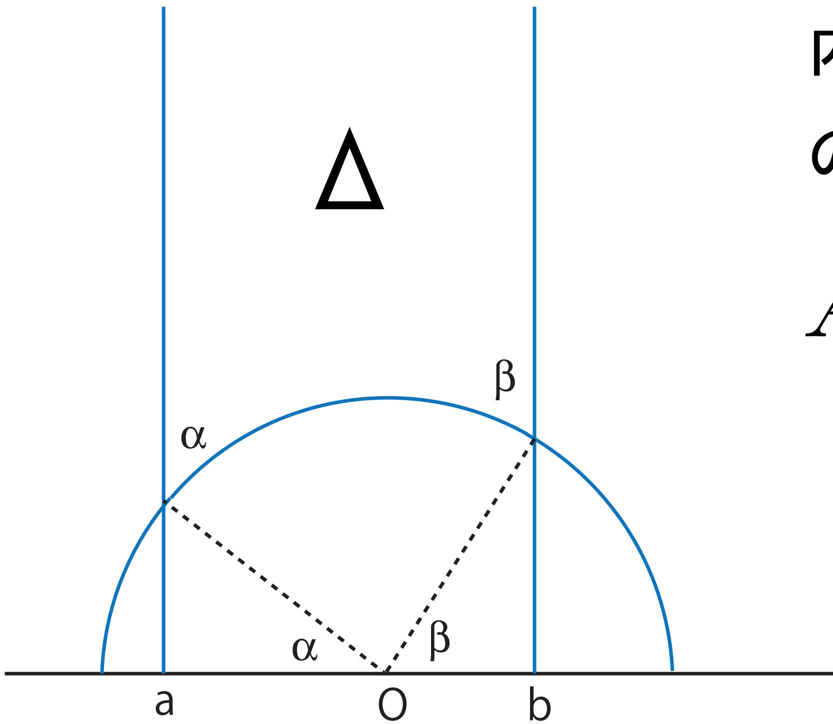
三角形の内角の和は180度より小さい

$$g_{11} = g_{22} = \frac{4}{(1-r^2)^2}$$

$$g_{12} = 0$$

単位円の内部に縮尺 $\dfrac{2}{1-r^2}$ で距離を入れる.

測地3角形の面積



内角 α, β, γ

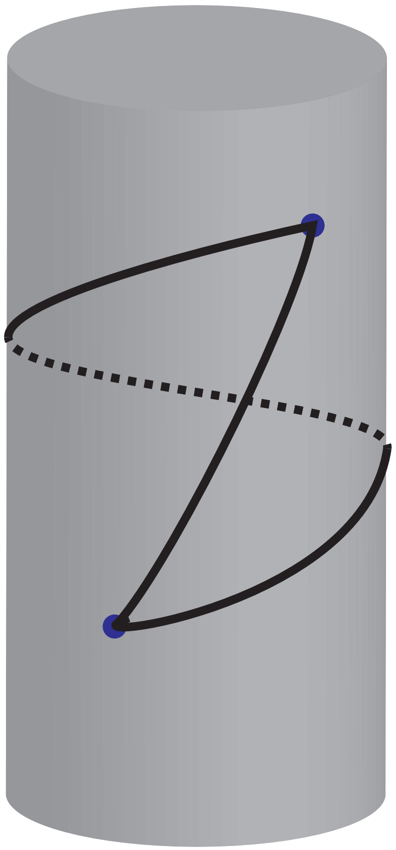
の測地3角形の面積

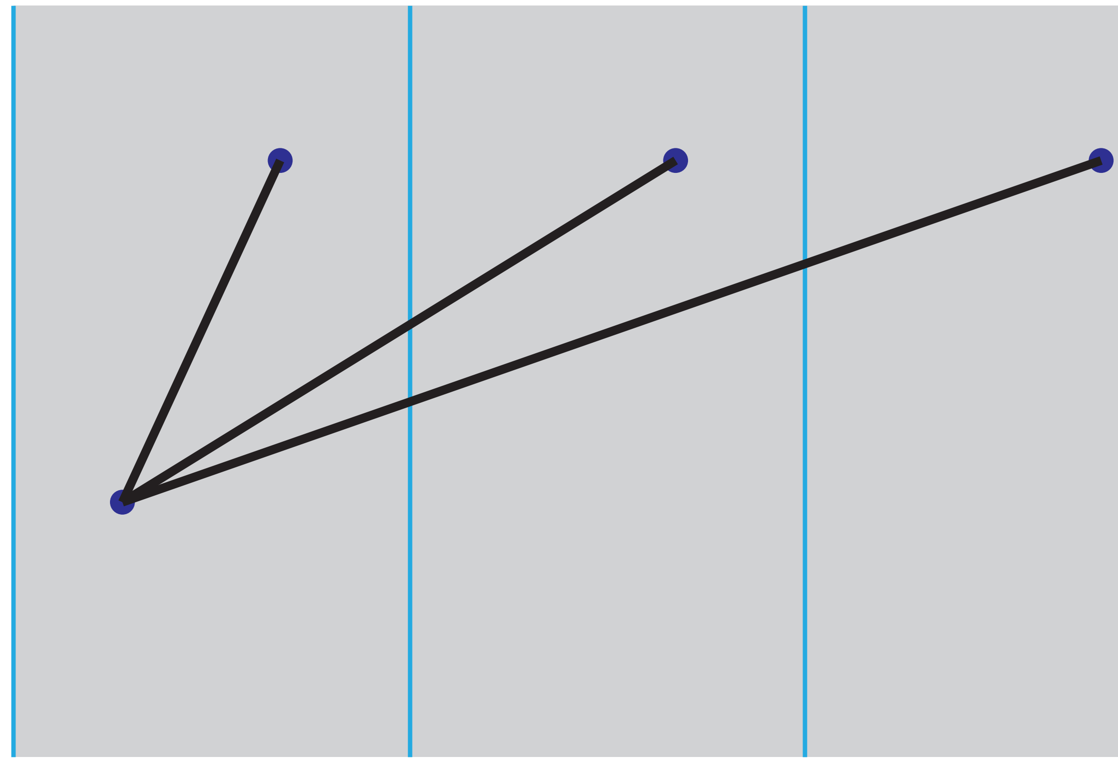
$$A = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$$

領域 Δ の面積

$$\int_a^b \left(\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{dy}{y^2} \right) dx = \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi - (\alpha + \beta)$$

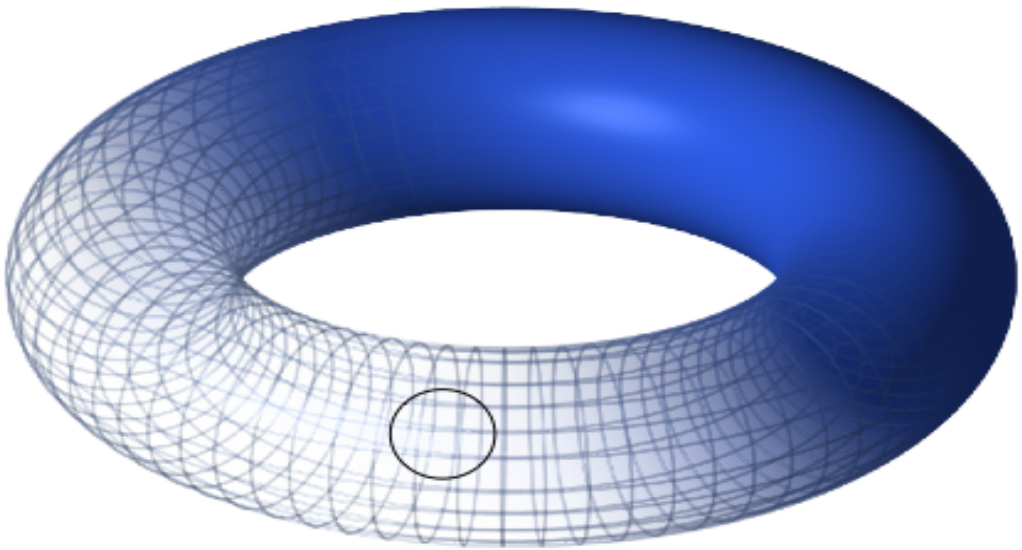
円柱（シリンダー）の展開図を考えてみよう

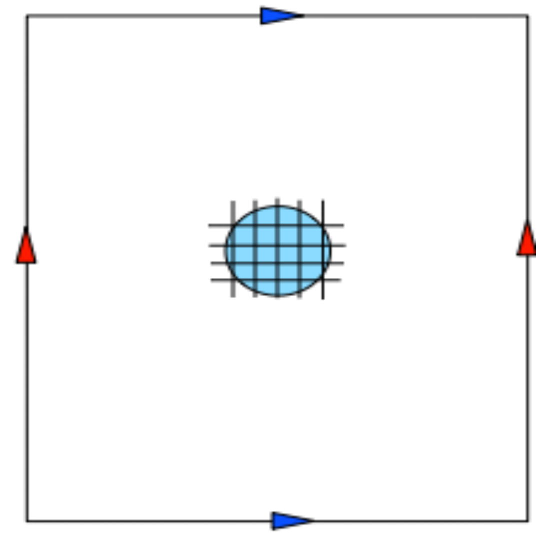




シリンダーの各点のまわりはユークリッド平面の一部と同じ構造をもつ.

トーラスの幾何構造



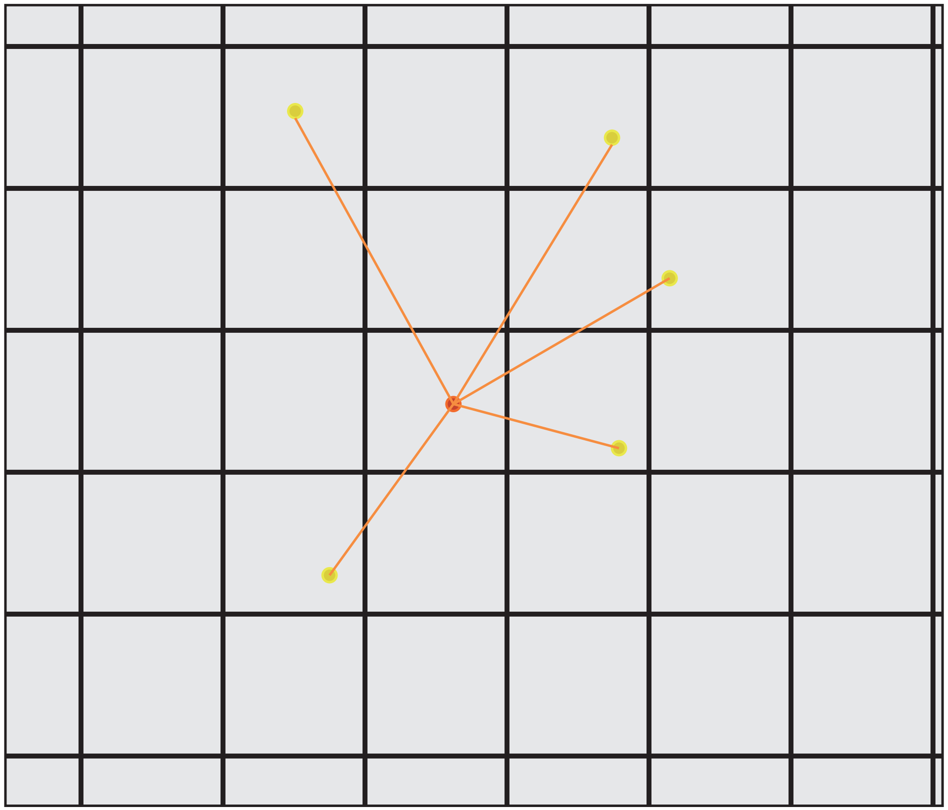


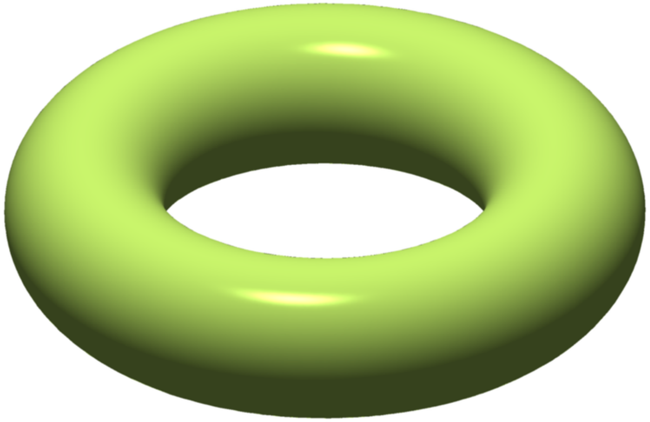
トーラスは右のような展開図によって距離をさだめるとどの点のまわりも平面の円の内部と合同になる.

トーラスの局所ユークリッド幾何構造

トーラスはフラットな構造をもつ

トーラスの幾何構造のモデル



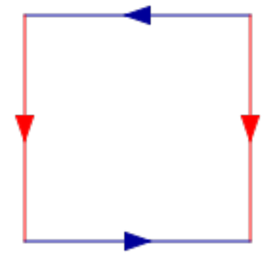


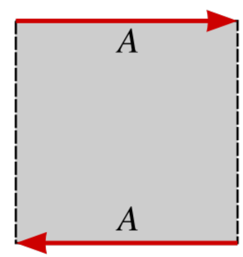
ユークリッド平面はトーラスの幾何構造のモデルである.
トーラスからモデルとなる平面を再現するには, トーラスの一点について, そこに到達する「光源」すべてを観測すればよい.

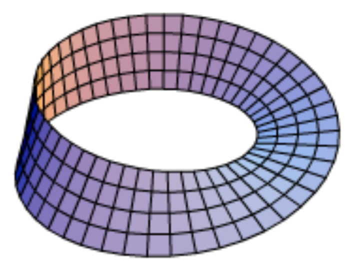
局所ユークリッド曲面

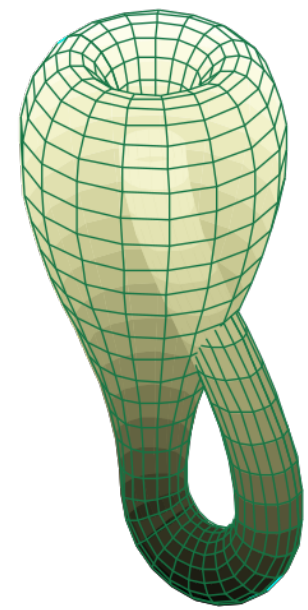
局所的にユークリッド平面と合同な完備な
曲面は次の5通りに分類される.

- １　ユークリッド平面
- ２　シリンダー
- ３　トーラス
- ４　開いたメビウスの帯
- ５　クラインのつぼ









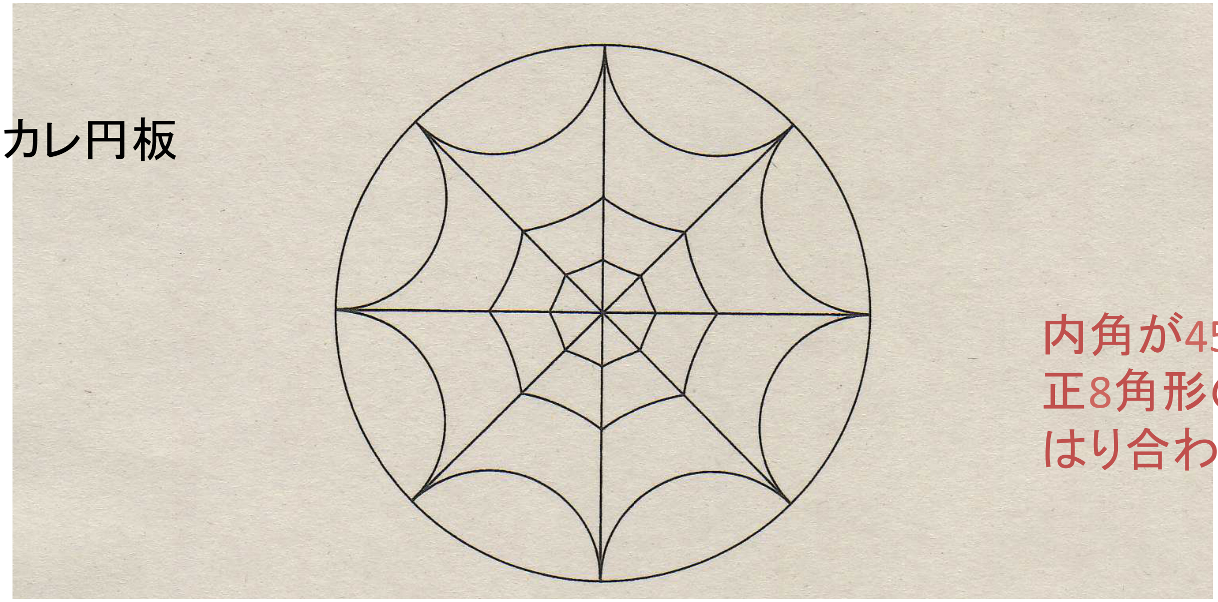
完備とは測地線がどこまでものばせること(端がない)
トーラスとクラインのつぼはコンパクト(有限な広がり)

クラインのつぼの模型

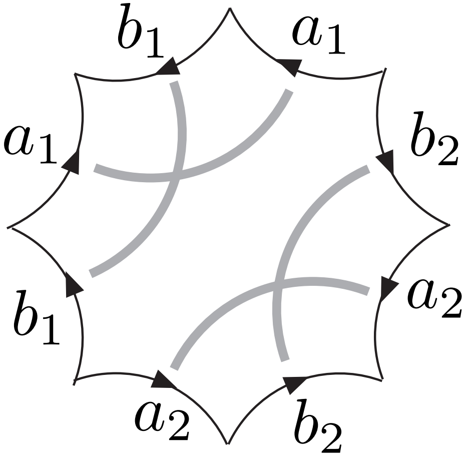
種数2の曲面

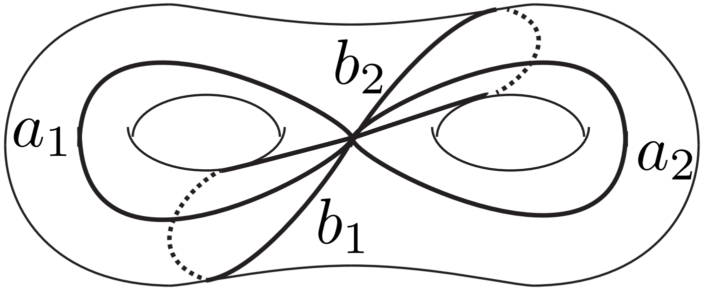
種数2の曲面の双曲幾何構造

ポアンカレ円板



内角が45度の
正8角形の辺を
はり合わせる.





2次元幾何構造のモデル

球面	ユークリッド平面	双曲平面
三角形の内角の和は180度より大	三角形の内角の和は180度	三角形の内角の和は180度より小
曲率 正	曲率 0	曲率 負
	トーラス	種数2以上の曲面

タイプ $\{p,q\}$ のタイリング

ユークリッド平面

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{2}$$

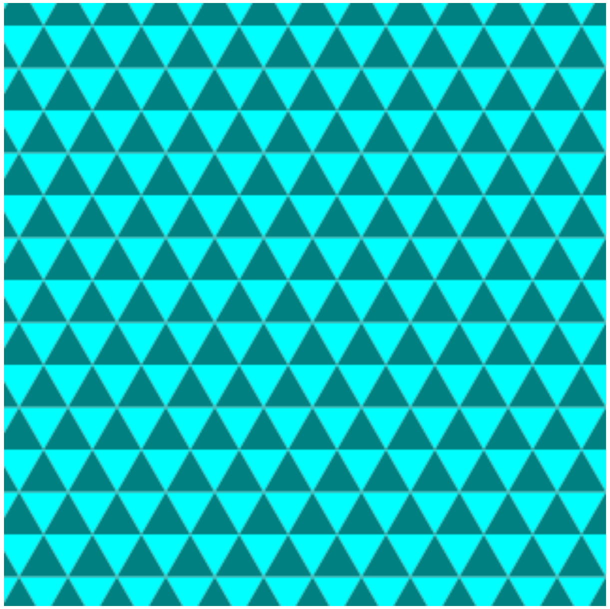
球面

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}>\frac{1}{2}$$

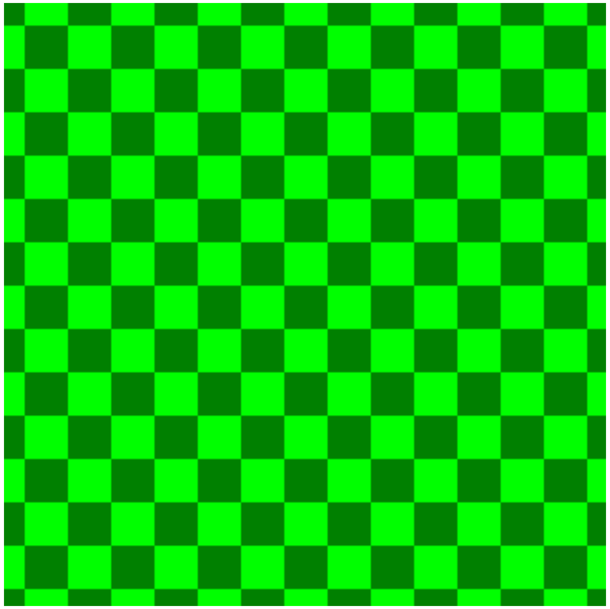
双曲平面

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}<\frac{1}{2}$$

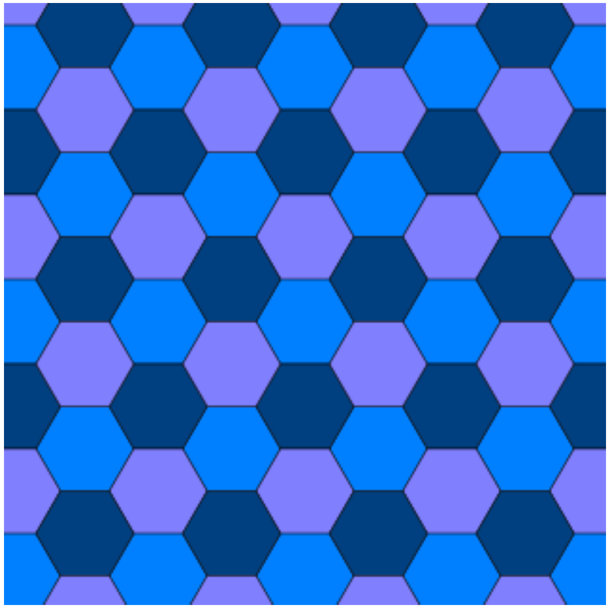
ユークリッド平面の正則分割 (タイルばり)



{3, 6}

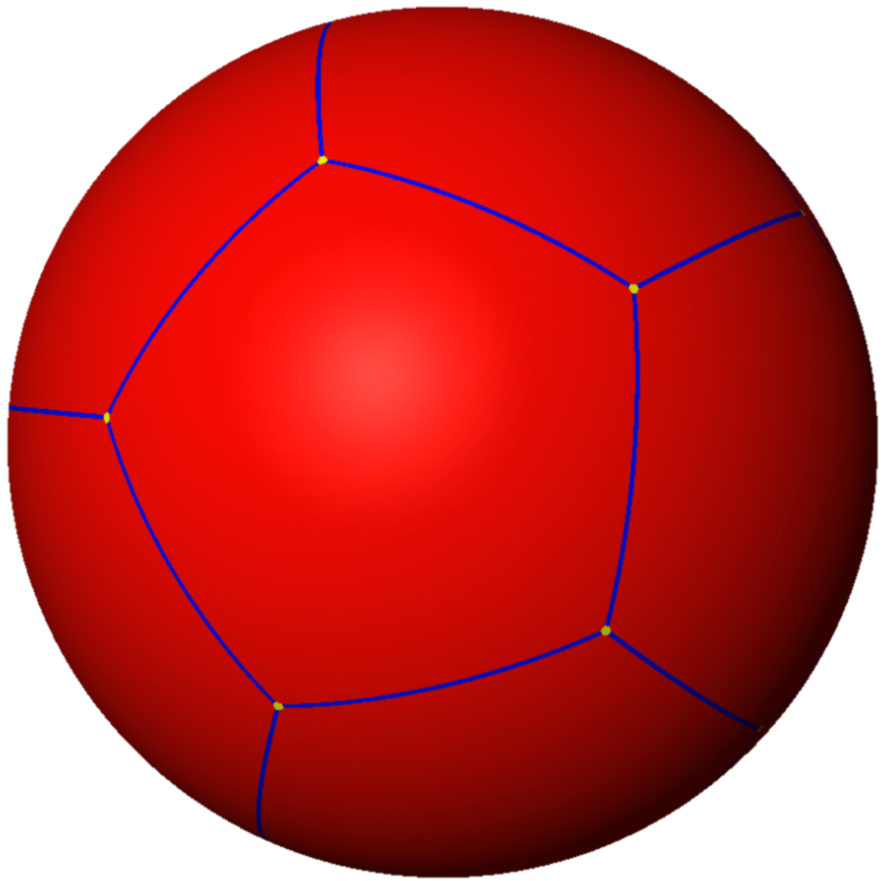


{4, 4}



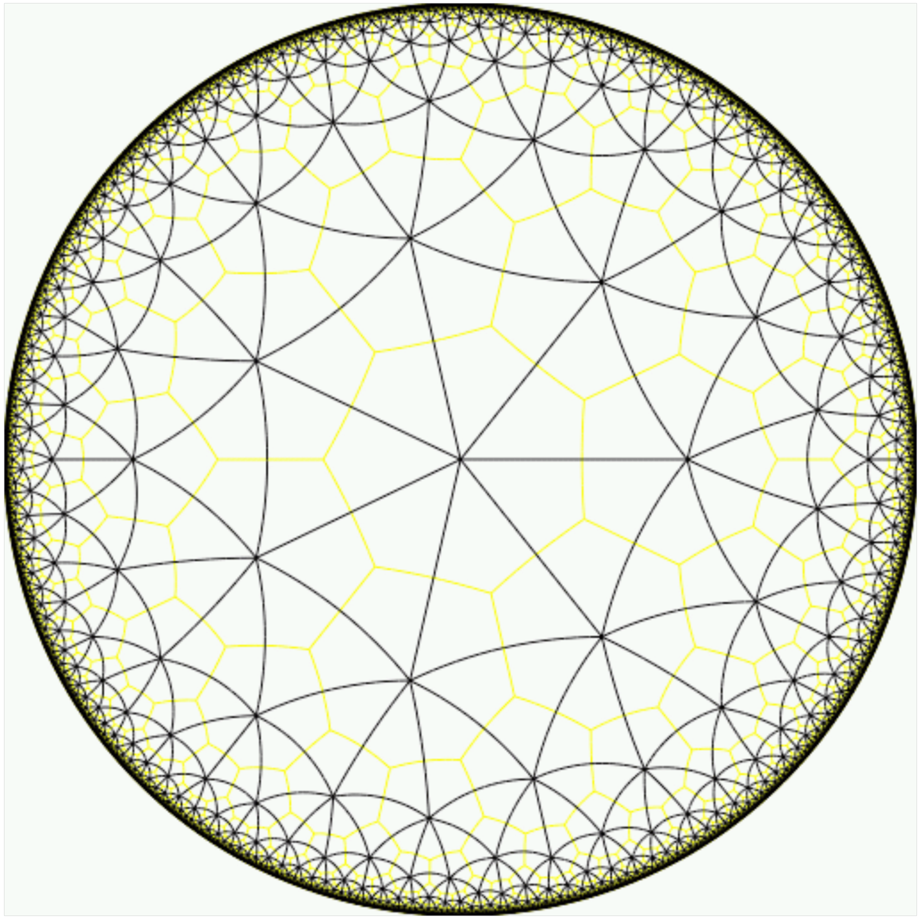
{6, 3}

球面上の正12面体

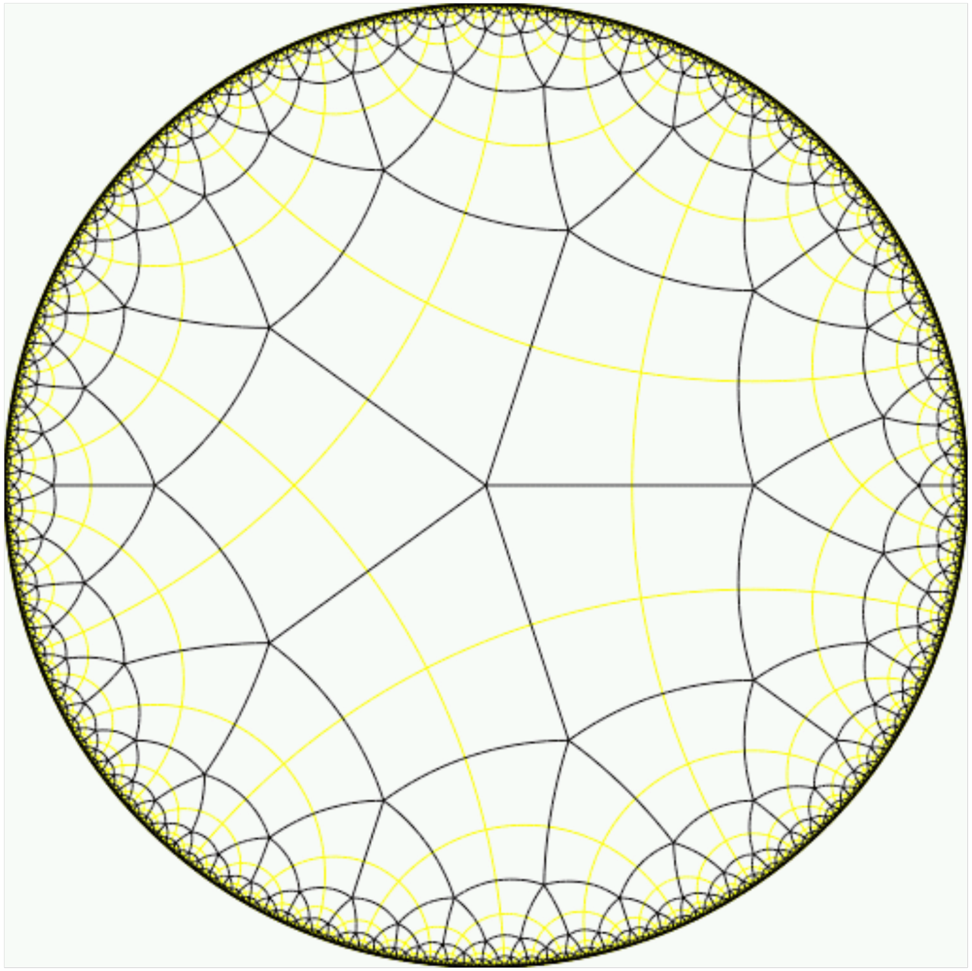


辺は大円の弧
正5角形の内角は120°

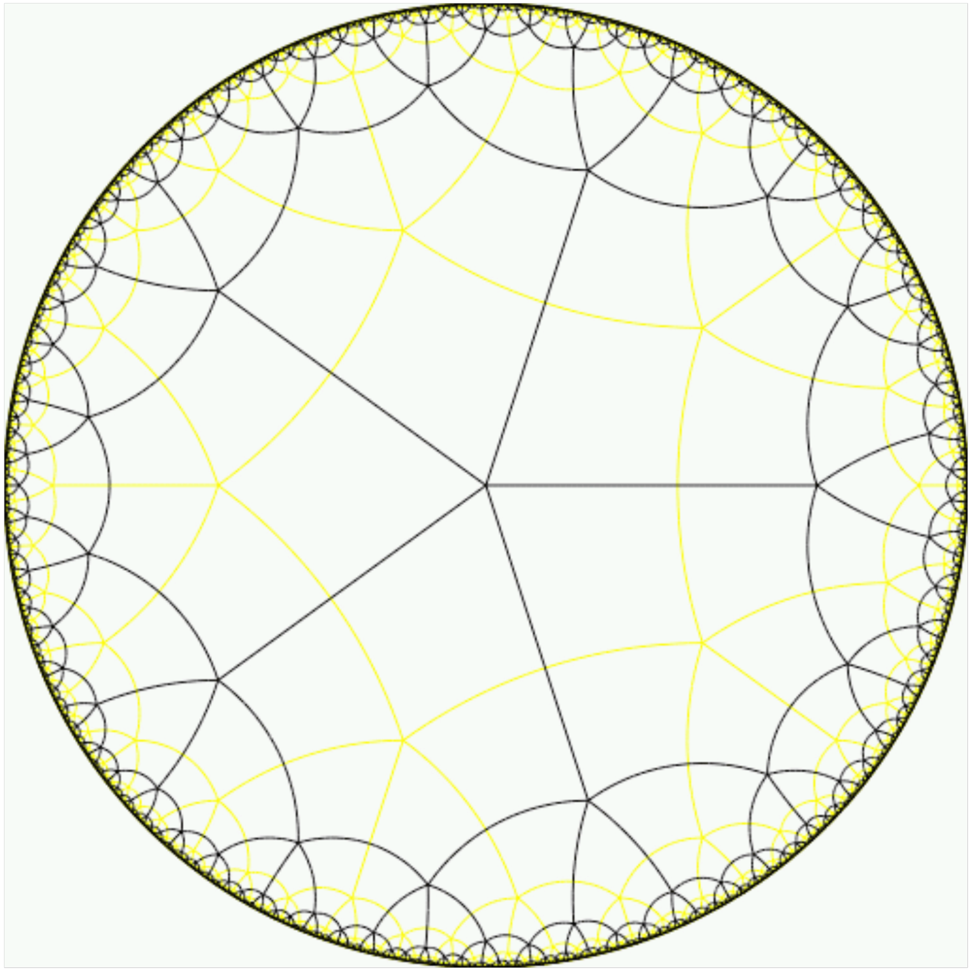
双曲平面のタイルばり{3,7}型



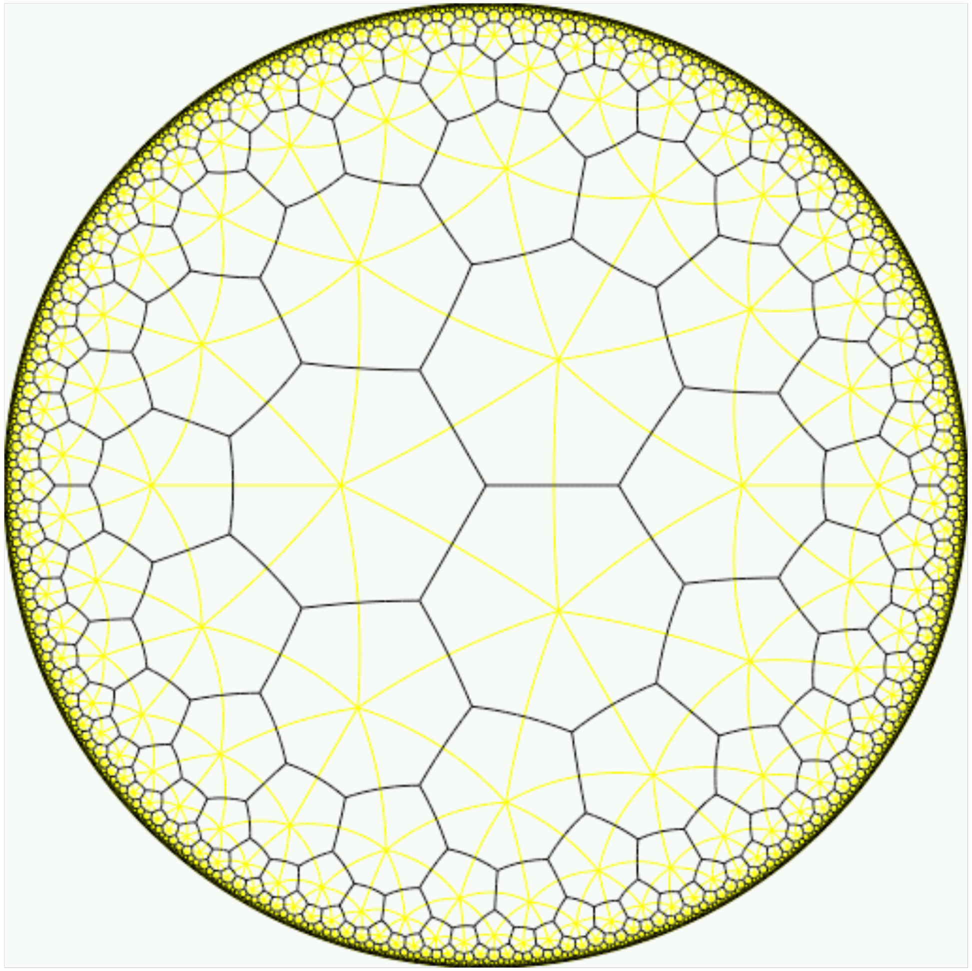
双曲平面のタイルばり{4,5}型



双曲平面のタイルばり{5, 5}型



双曲平面のタイルばり{7, 3}型



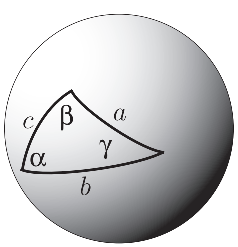
ガウスの定理 Theorema Egregium

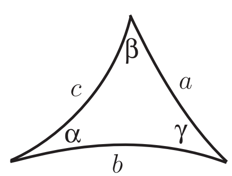
曲面のガウス曲率は，計量によって定まる.

曲率は曲面が入っている空間からみなくても，内在的にさだまる.

ガウス曲率 K の測地三角形での平均は,
三角形の内角を α, β, γ として

$$\alpha + \beta + \gamma - \pi$$





等距離地図の不可能性
地球のどんな小さい部分も縮尺一定の正確な地図はつくれない！

球面の曲率は正，　平面の曲率は０

内在的な微分幾何学の確立

計量から出発して，空間の曲がり具合を表す曲率の概念が
リーマンによって定式化された.

局所的に n 個の座標で定義できる
図形が n 次元多様体

Riemann 1826-1866

リーマンの曲率テンソル

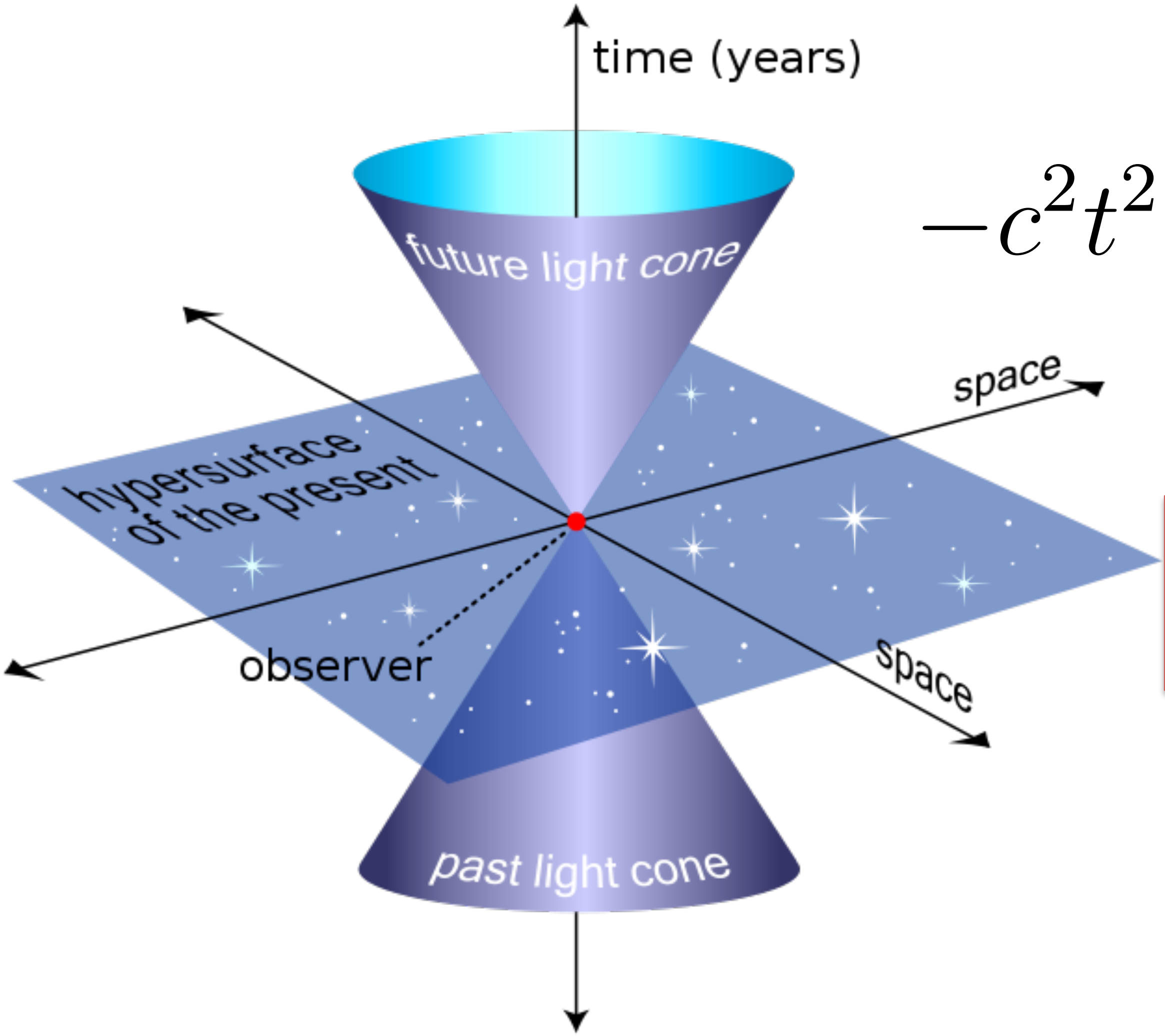
$g_{\mu\nu}$ 計量　リーマン多様体

測地線

さまざまな方向の測地3角形の内角を見る

$R_{\mu\nu}$ リッチ曲率

ローレンツ計量と光錐



$$-c^2t^2 + x^2 + y^2 + z^2$$

特殊相対論はローレンツ計量を不変にする理論
（光速の不変性）

内在的な微分幾何と相対論

計量から出発した内在的な幾何学はアインシュタインの一般相対性理論の成立に影響を与えた.

アインシュタイン方程式

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

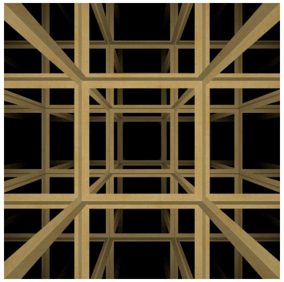
左辺は4次元時空の曲がり具合を表し，計量で表現される.
右辺は質量，エネルギーの分布を表す.

光の経路は測地線で表される.

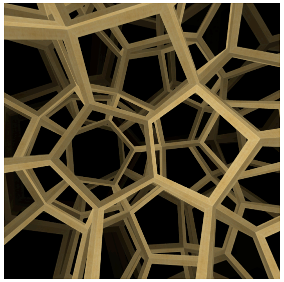
3次元幾何構造のモデル空間

等方性をもつのは次の3通り

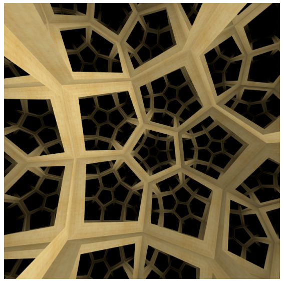
3次元ユークリッド空間　　曲率 0



3次元球面　曲率が正の一定値

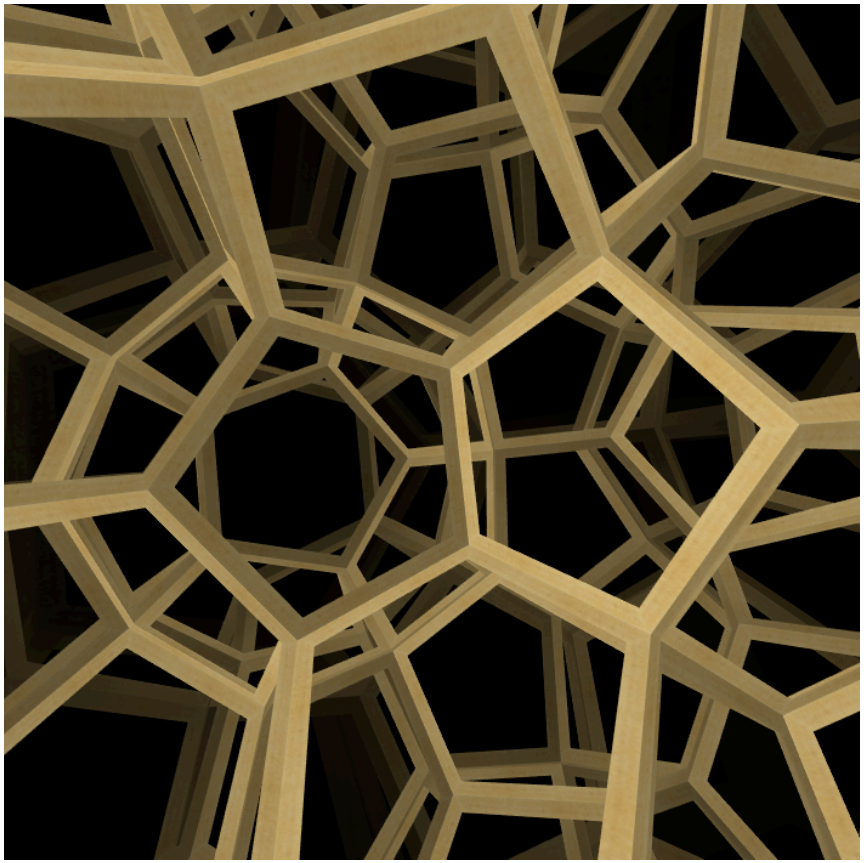


3次元双曲空間　曲率が負の一定値



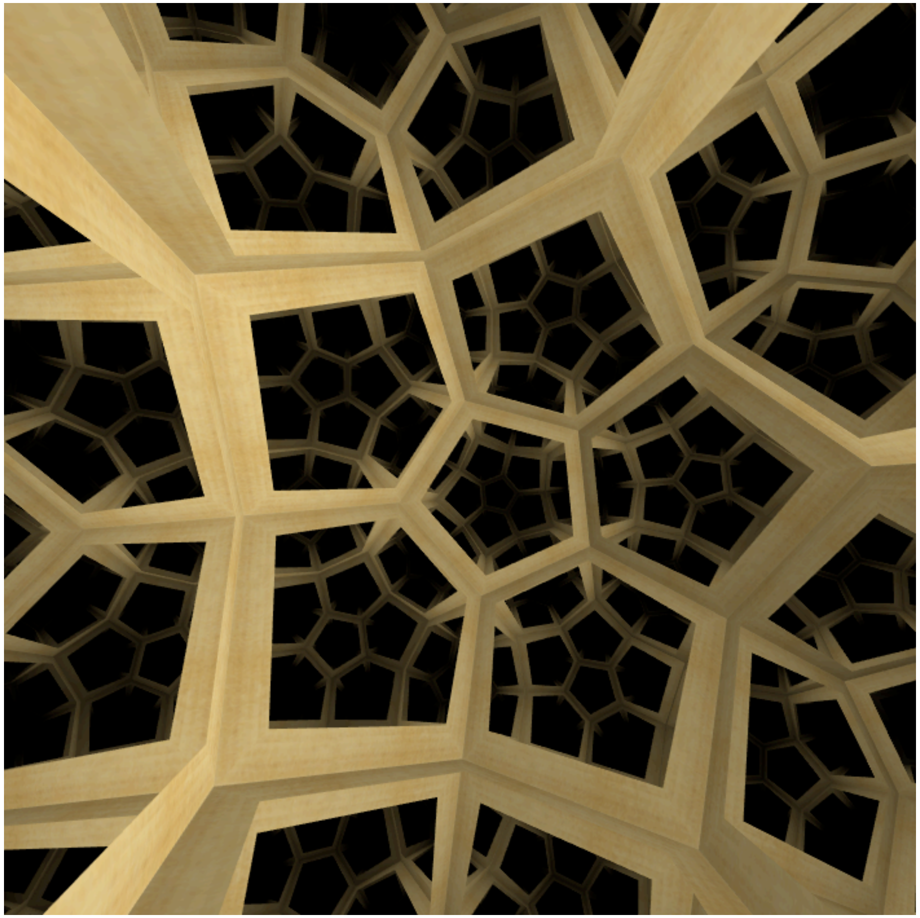
これ以外に1次元と2次元の(捻った)積となるものが5通り存在

3次元球面の正則分割
{5, 3, 3}



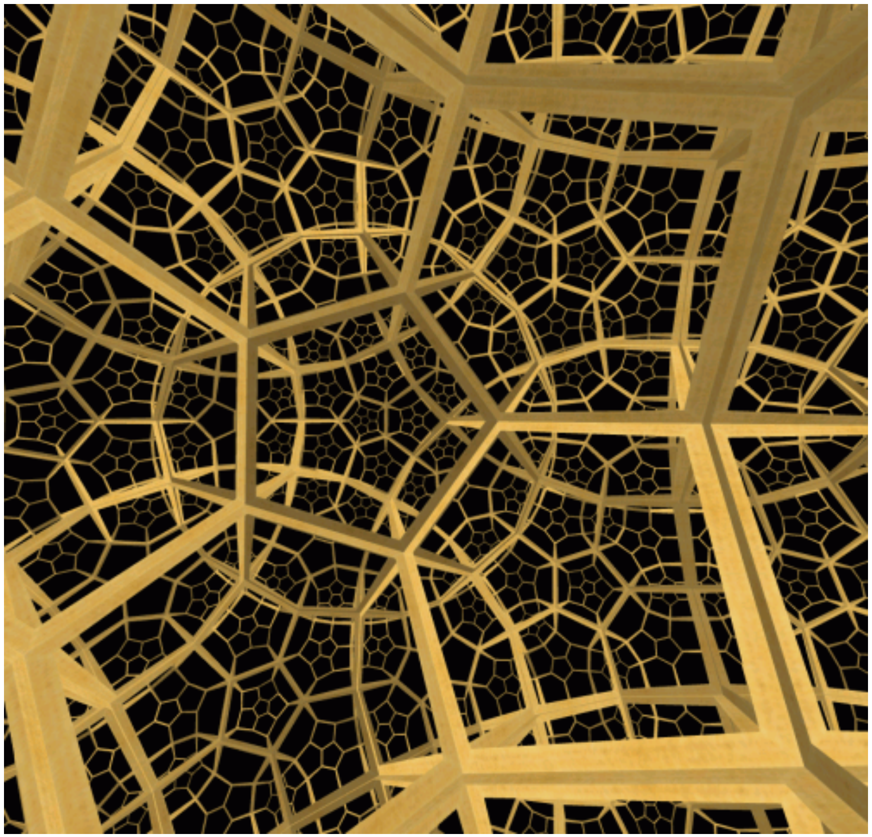
正12面体の対面を
1/10 回転してはり合わ
せものがポアンカレの
正12面体空間

双曲空間の正則分割
{5, 3, 4}

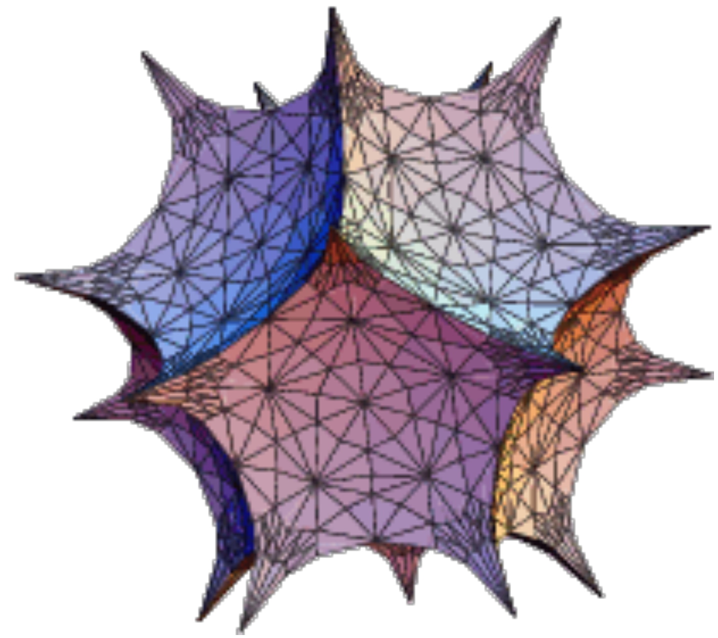


J. Weeks “Curved Space”　Hyperbolic　Seifert Weber

3次元双曲幾何構造



3次元双曲空間をモデルにもつ



3次元双曲正12面体

対面を 3/10 回転によって
はり合わせたののが
ザイフェルト・ウェーバー空間

3次元双曲幾何構造をもつ空間はきわめて多彩！

宇宙空間の幾何構造

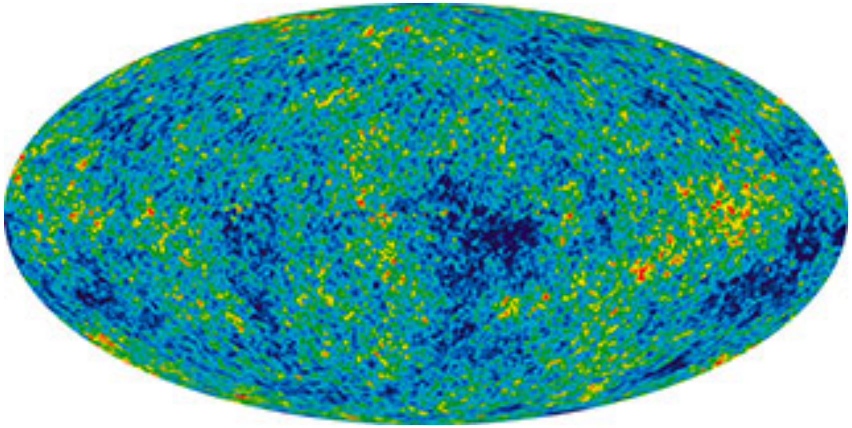
宇宙空間が等質的かつ等方的であるとすると，3次元ユークリッド空間，3次元球面，3次元双曲空間のいずれかの幾何構造をもつ．

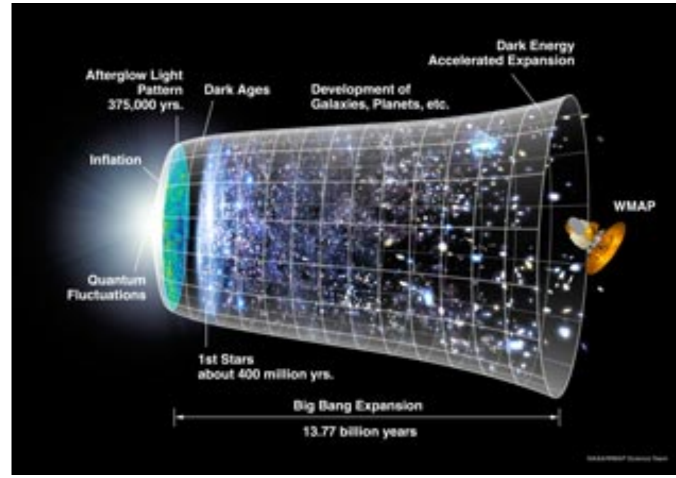
上の3つの幾何構造に対応するアインシュタイン方程式の解が存在する（ロバートソン・ウォーカー計量）

ρ 宇宙の物質密度　H ハッブル定数（退行速度と距離の比）

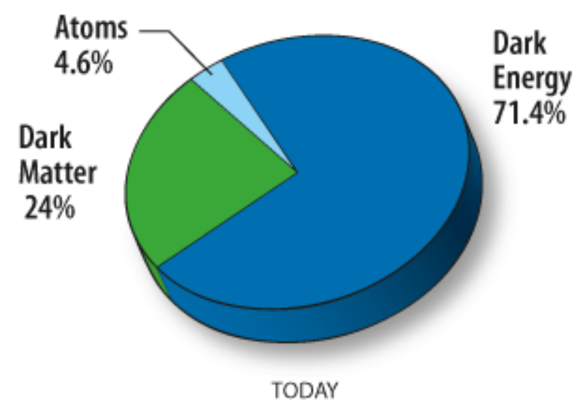
$\rho > \dfrac{3}{8\pi G}H^2$	3次元球面幾何	体積有限
$\rho = \dfrac{3}{8\pi G}H^2$	3次元ユークリッド幾何	体積は有限にも無限にもなりうる
$\rho < \dfrac{3}{8\pi G}H^2$	3次元双曲幾何	体積は有限にも無限にもなりうる

WMAPによる観測





WMAPによるビッグバンの残り火
「マイクロ波宇宙背景放射」の観測により
宇宙のさまざまなパラーメータが推定されている.



宇宙の曲率は 0.02 ± 0.02 というレベルで 0に近い.

フラットで有限な空間のかたちは10通りある.
双曲幾何構造，球面幾何構造の可能性も
否定されているわけではない.

今後の重力波の観測などが重要な手がかりになる
と期待される.

まとめ

- 空間の曲率は内在的に決まり，空間の中から観測可能である.
- 3次元の広がりをもつ空間の幾何構造のモデルは数学的には，完全に分類されている.
- モデルが決まっても，3次元空間の可能性は有限なもの，無限なものを含めて多様に存在する.
- 空間の幾何構造を特定するには，観測データが必要であり，天文学者と物理学者，数学者の協力が不可欠である.