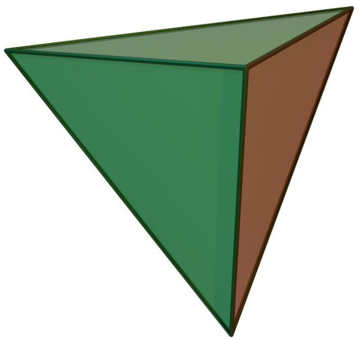
4次元多面体から空間のかたちをみる
ー ４次元の図形を見よう

河野 俊丈

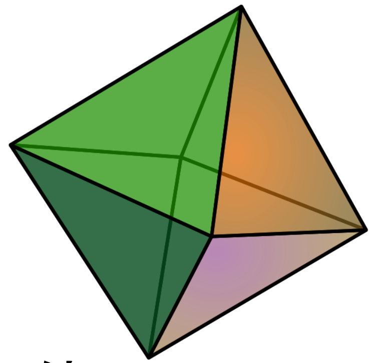
2016年6月30日

学術俯瞰講義「図形から拡がる数理科学」

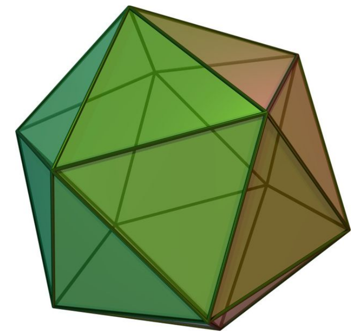
3次元空間の正多面体



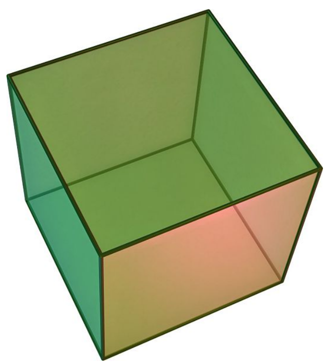
正4面体



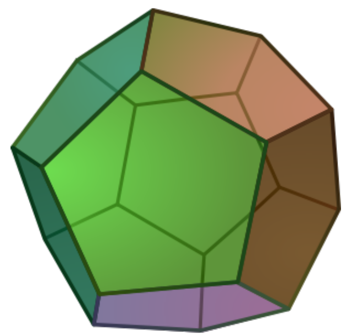
正8面体



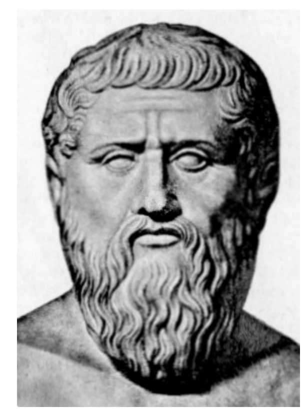
正20面体



立方体

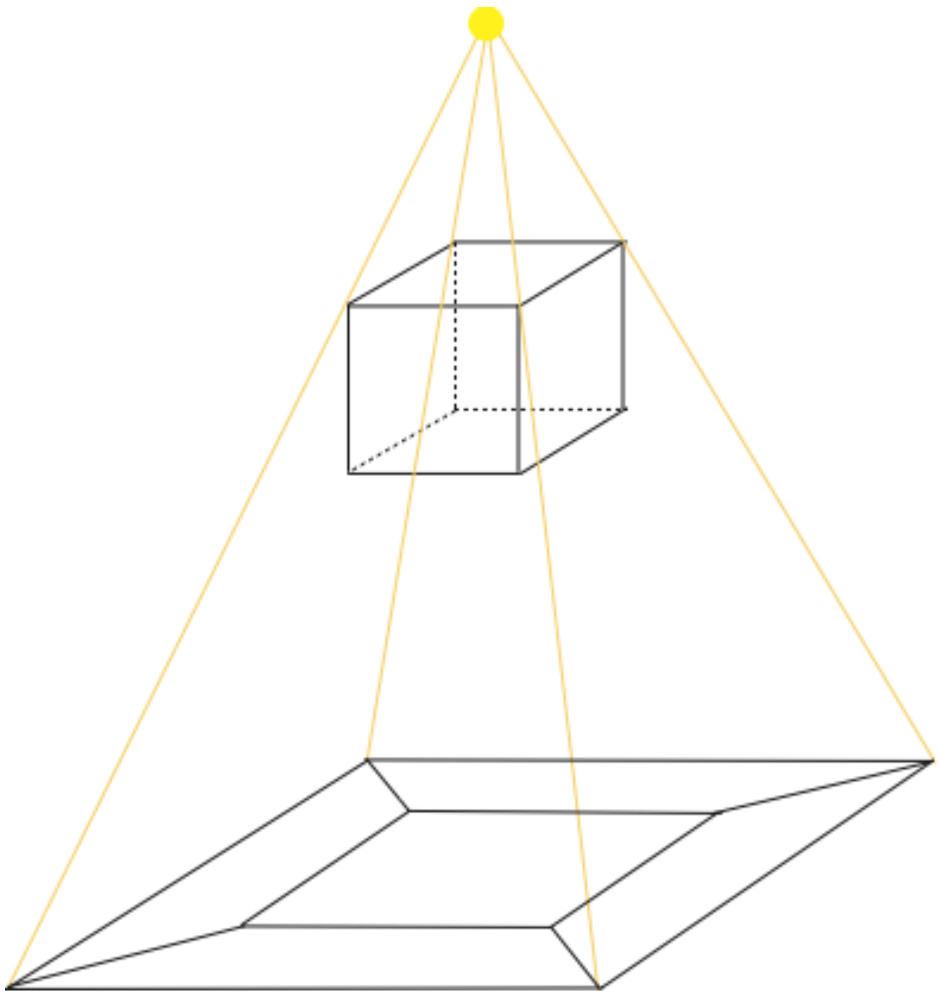


正12面体



Plato

立方体の射影



1点から発する光による射影.

立方体の1つの面を取り除いてそこから内部を眺めた像が得られる.

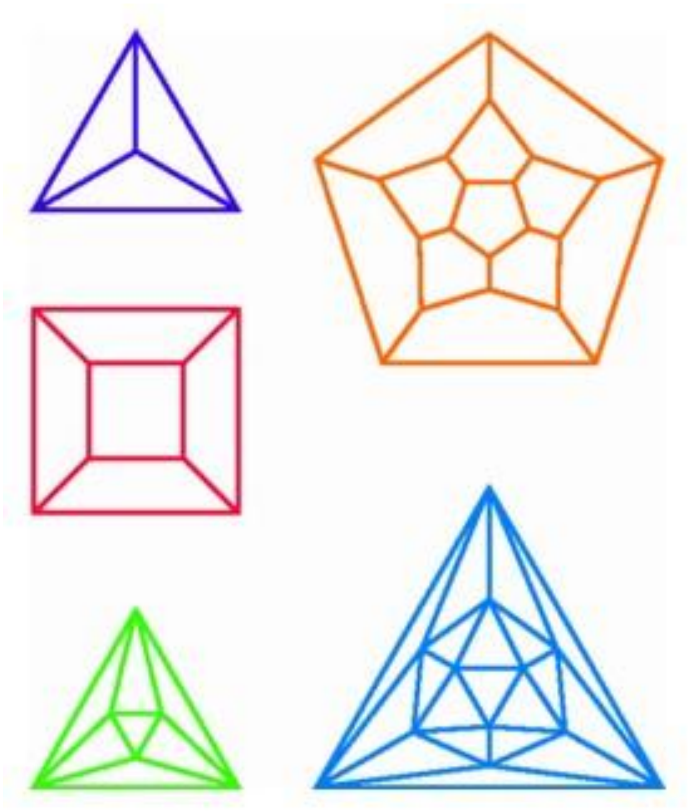
正多面体の射影

1つの面を水平面と平行におき点光源からの光で射影する.

正4面体

立方体

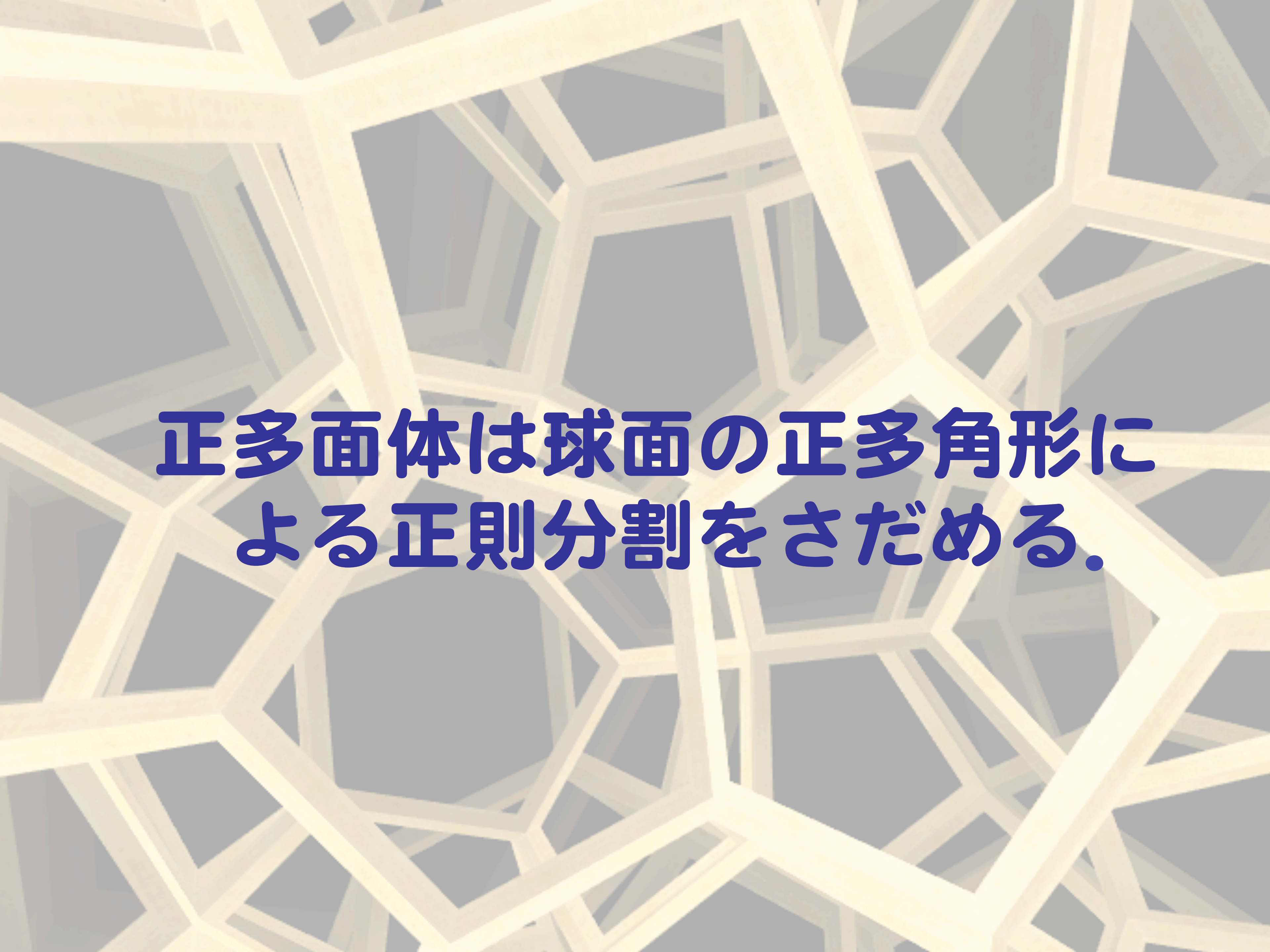
正8面体



正12面体

正20面体

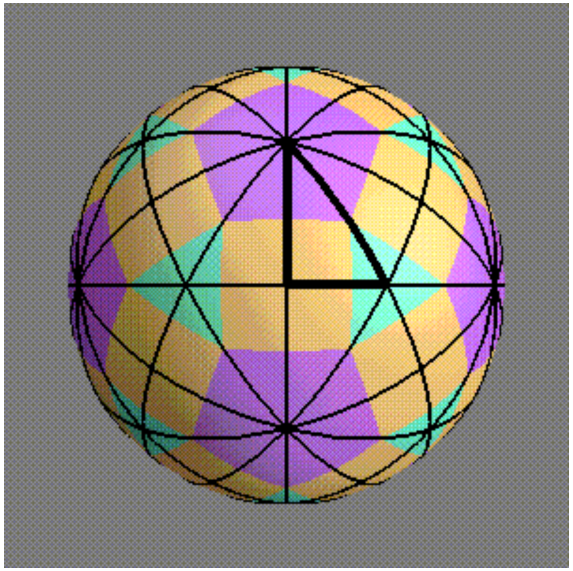
シュレーゲル図式

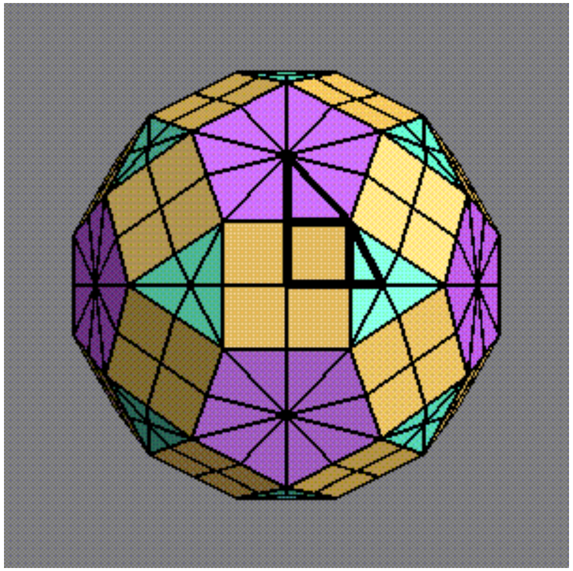


正多面体は球面の正多角形による正則分割をさだめる.

球面の正則分割

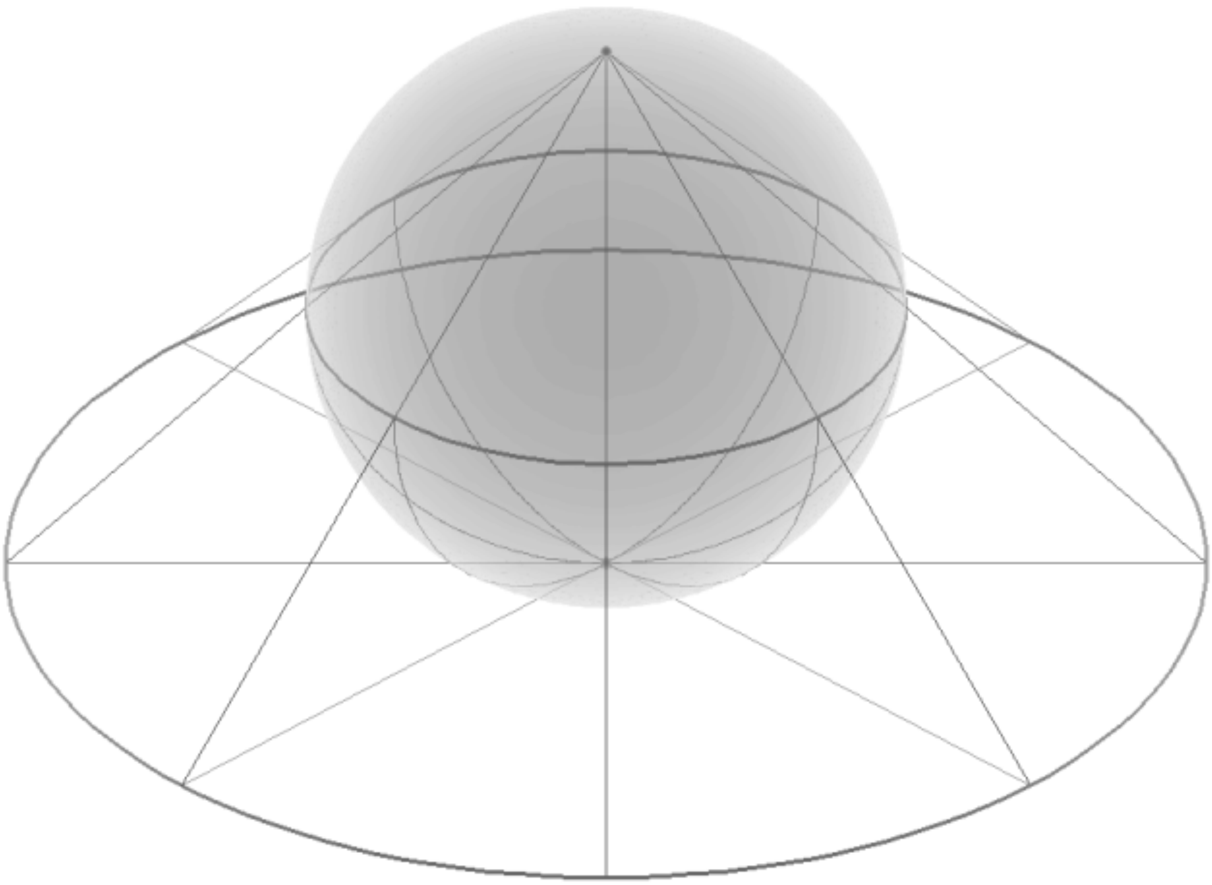
合同な正多角形が各頂点のまわりに同じ個数集まっている.





上の図には正3角形, 正5角形による正則分割（タイルばり）が含まれる.

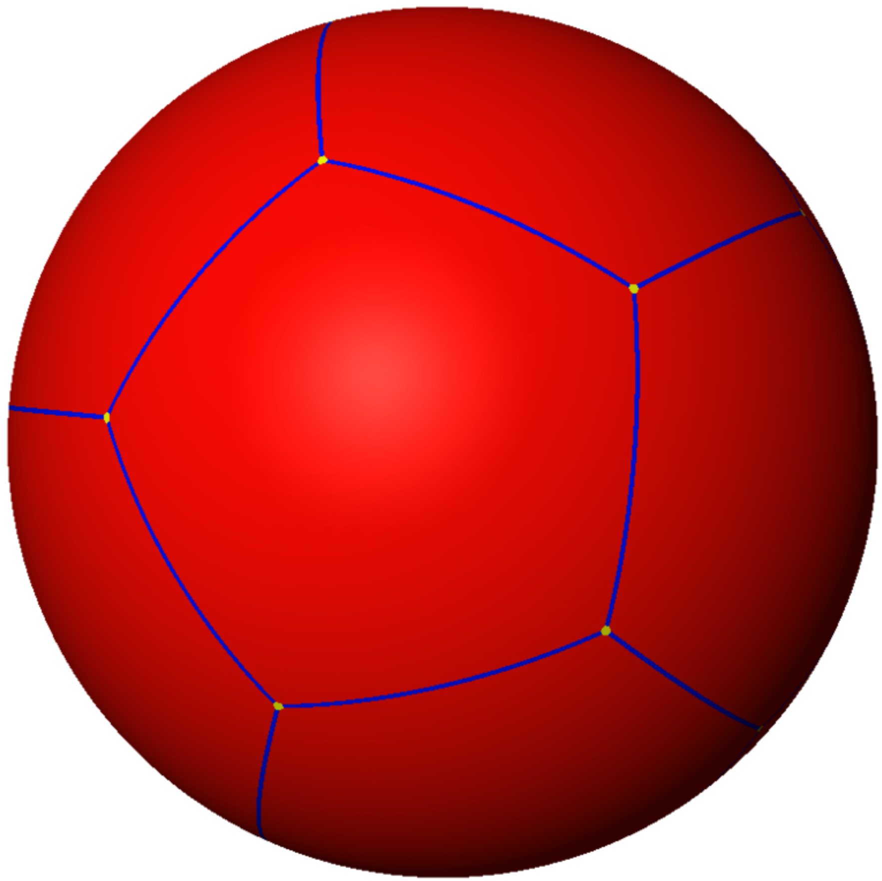
球面の立体射影



球面の北極点以外の点は平面と1対1に対応

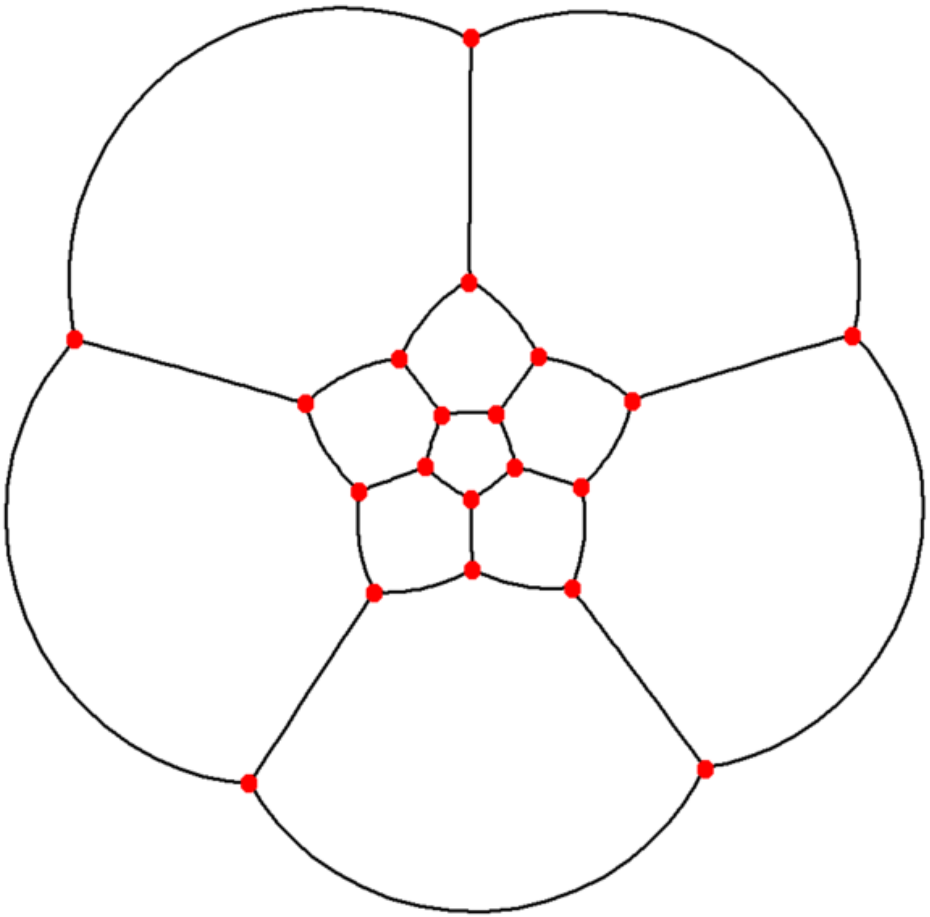
球面は平面に無限遠点をつけ加えたものとみなせる.

球面上の正12面体



辺は大円の弧
正5角形の内角は120°

正12面体の立体射影

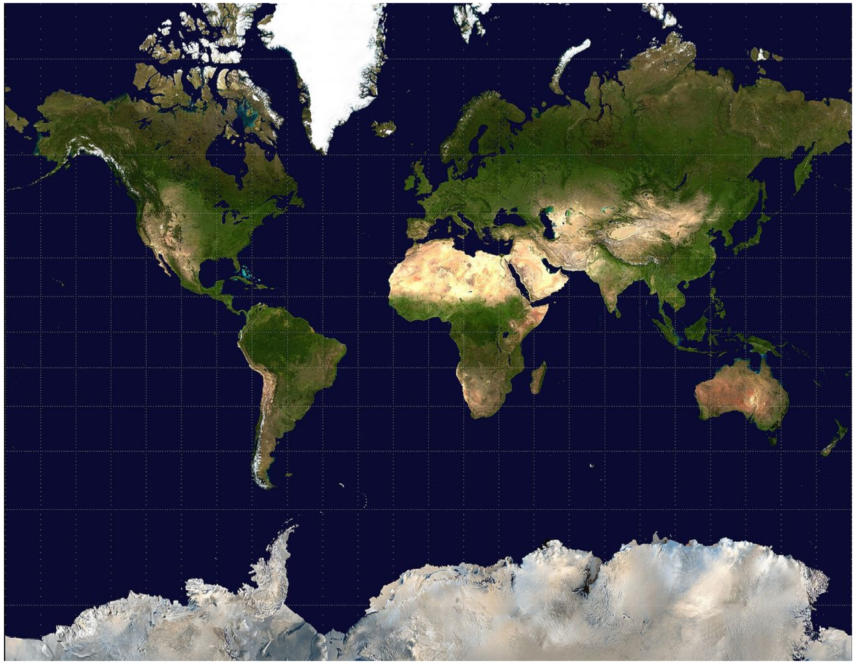


平面の12個の領域
への分割.

外側の領域も無限遠点
を加えて，正12面体の
1つの面に対応.

射影によって角度は
保たれる.

メルカトル図法による地図



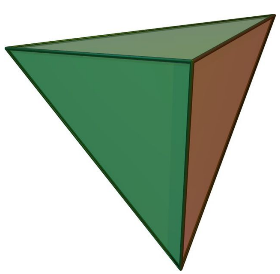
1569年にメルカトルが作成した地図

メルカトル図法では場所によって縮尺が異なるが
角度は正確に表現される.

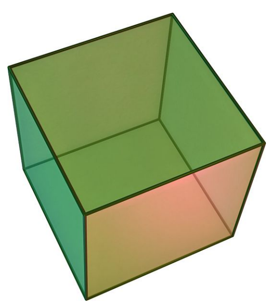
シュレフリー記号

{n}　正 n 角形

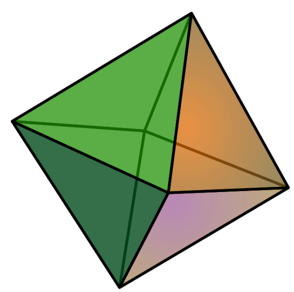
{p, q}　正多角形 {p} がそれぞれの頂点のまわりに q 個集まる.



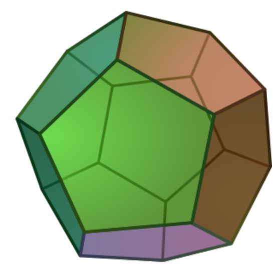
{3, 3}



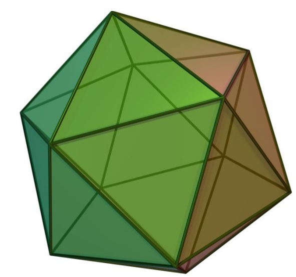
{4, 3}



{3, 4}

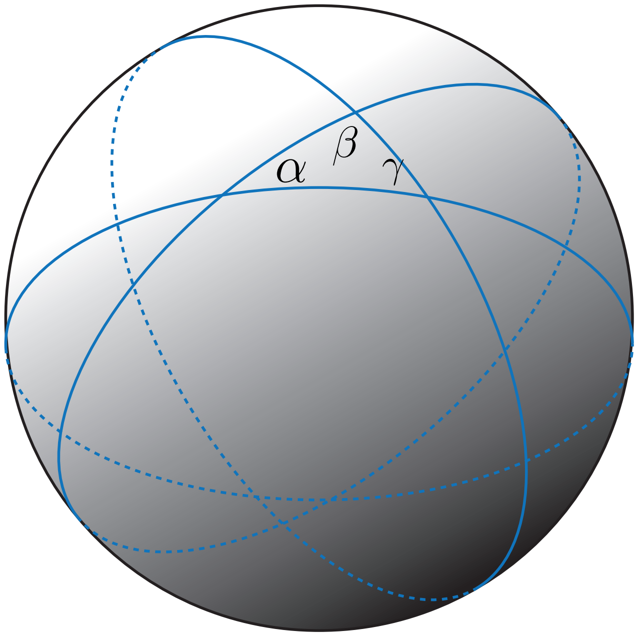


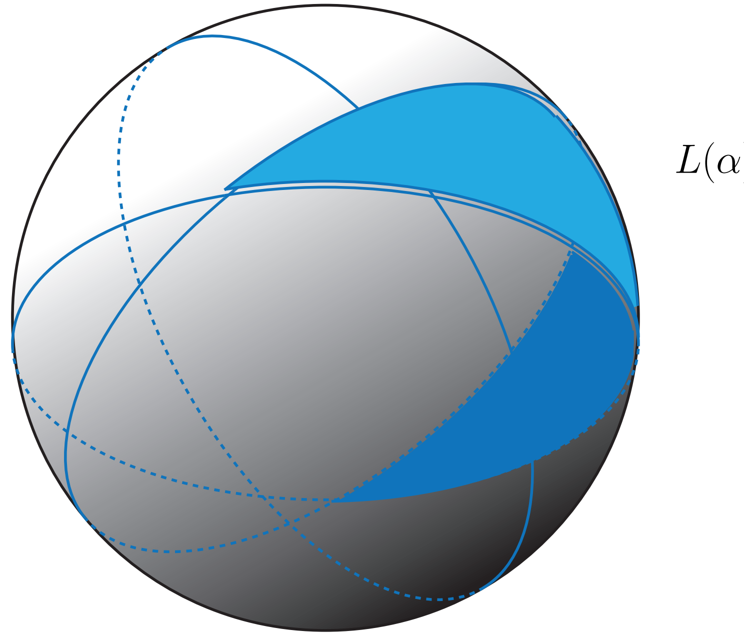
{5, 3}



{3, 5}

単位球面上の三角形





球面三角形の面積 $\boxed{A = \alpha + \beta + \gamma - \pi}$

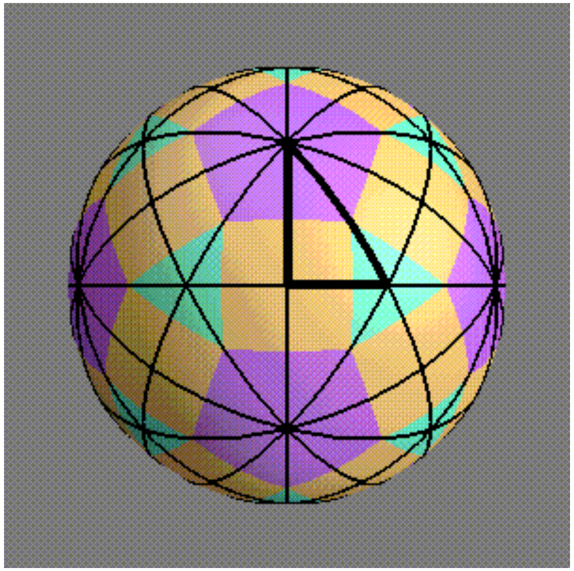
右の青く塗った部分の面積は 2α

$$\alpha + \beta + \gamma > \pi$$

球面の正則分割

シュレフリー記号 $\{p, q\}$ で表される球面の正則分割（タイルばり）が存在するとき，球面上に内角 $\pi/p, \pi/q, \pi/2$ の三角形が描かれる．
$\frac{\pi}{p} + \frac{\pi}{q} + \frac{\pi}{2} - \pi > 0$ より

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2}$$



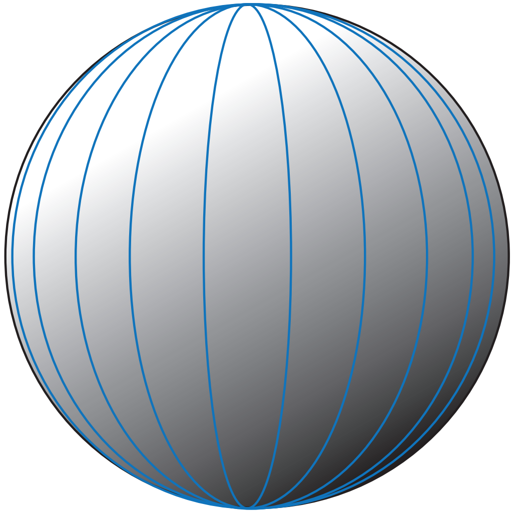
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2}$$

上の不等式を満たす2以上の整数 (p, q)の組

正多面体のシュレフリー記号
{p, q}

{3, 3}, {4, 3}, {3, 4}, {5, 3}, {3, 5}
および

{2, n}, {n, 2}, nは2以上の整数



タイプ $\{p, q\}$ のタイルばり

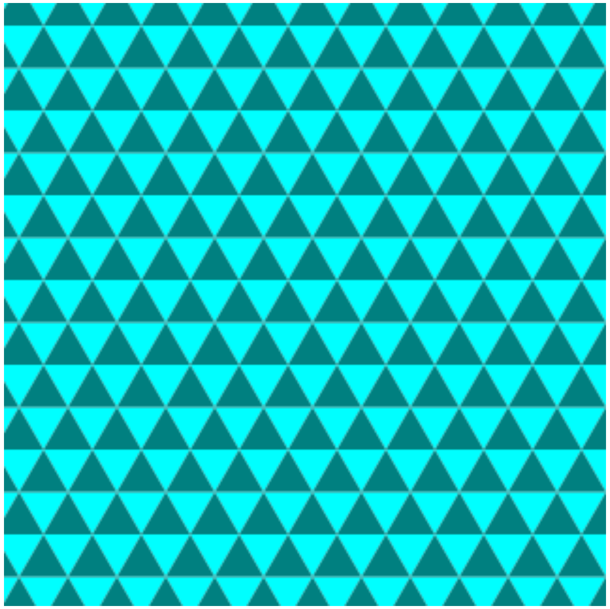
ユークリッド平面

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2}$$

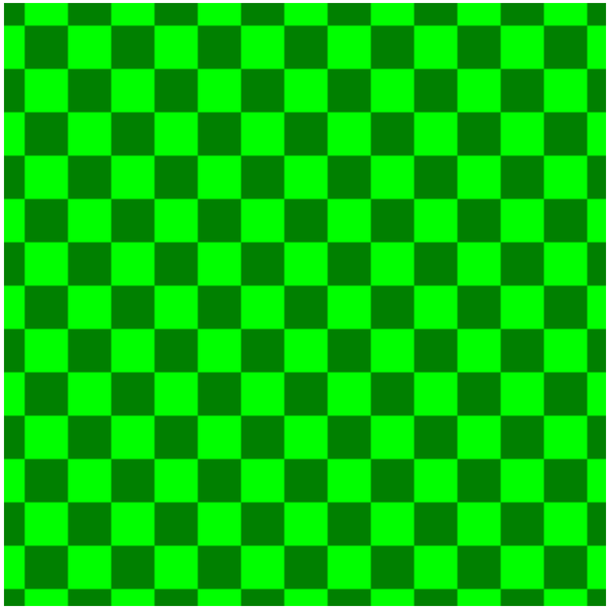
球面

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2}$$

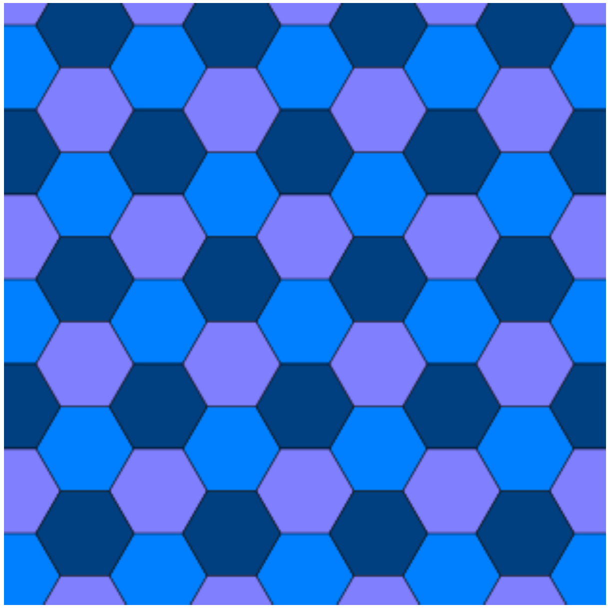
ユークリッド平面の正則分割 (タイルばり)



{3, 6}



{4, 4}

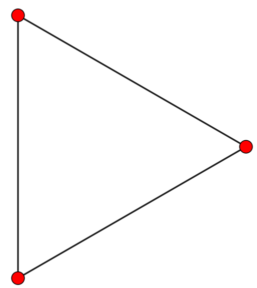


{6, 3}

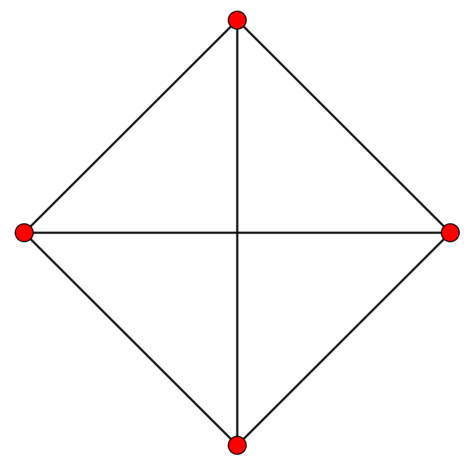
４次元空間の正多面体

4次元の図形

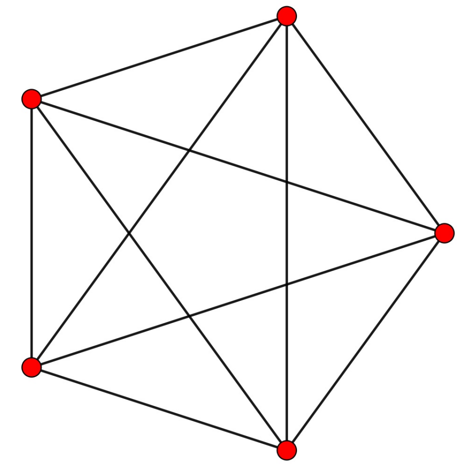
1次元
線分



2次元
正3角形

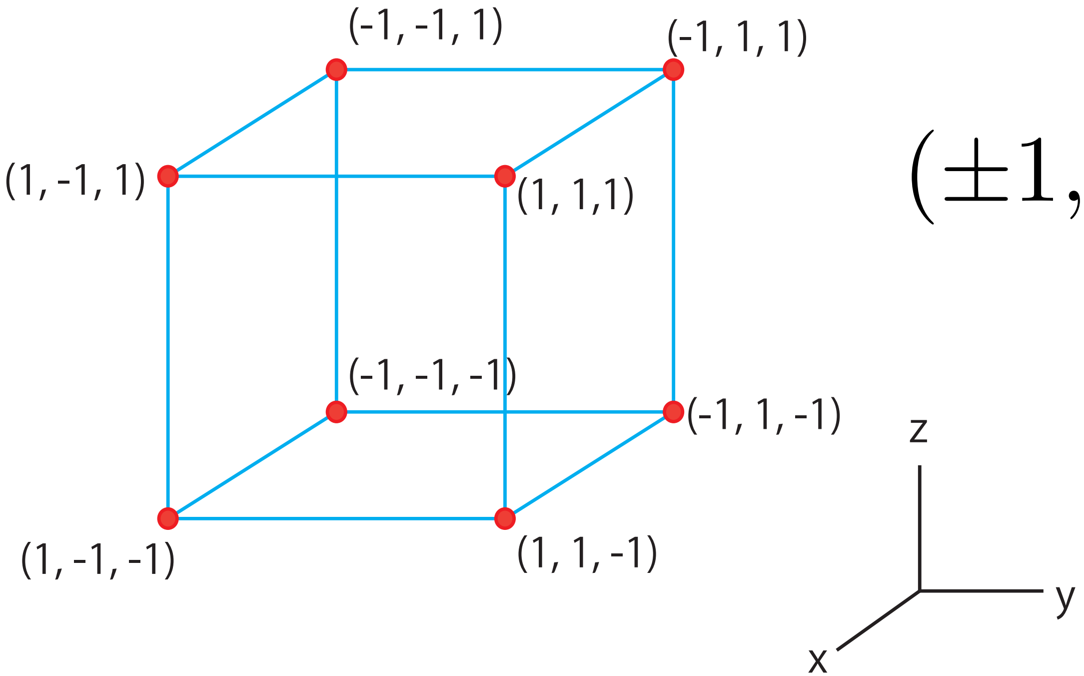


3次元
正4面体



4次元の図形の影？

立方体の頂点を3次元ユークリッド空間の座標で表す



$$(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$$

頂点の座標として (1, 1, 1) および座標の符号を変えた8個がとれる.

4次元ユークリッド空間

4つの実数の組み (a, b, c, d) を座標に持つ数ベクトル空間

2点間の距離を次のように測る.

$P(x_1, x_2, x_3, x_4)$, $Q(y_1, y_2, y_3, y_4)$ の距離を

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{4}(x_i - y_i)^2}$$

で定める.

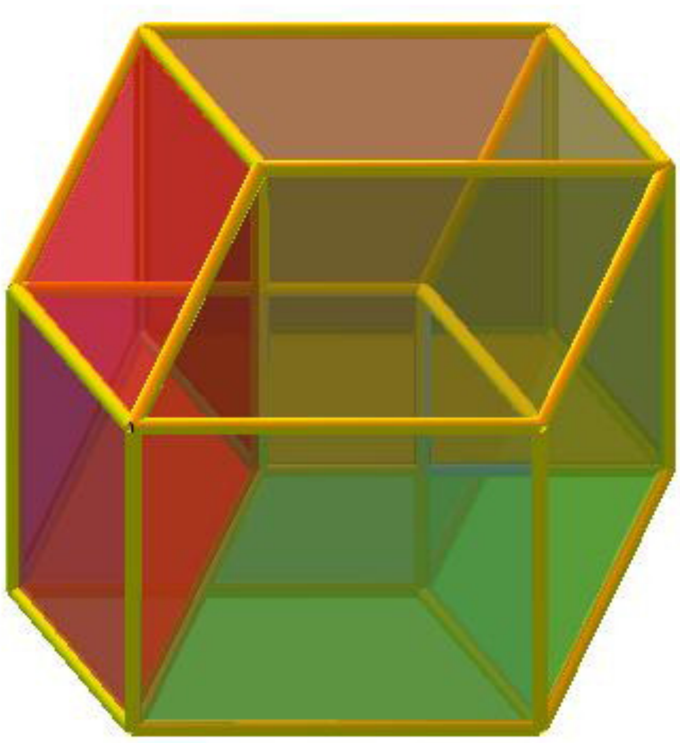
4次元空間の立方体 hypercube

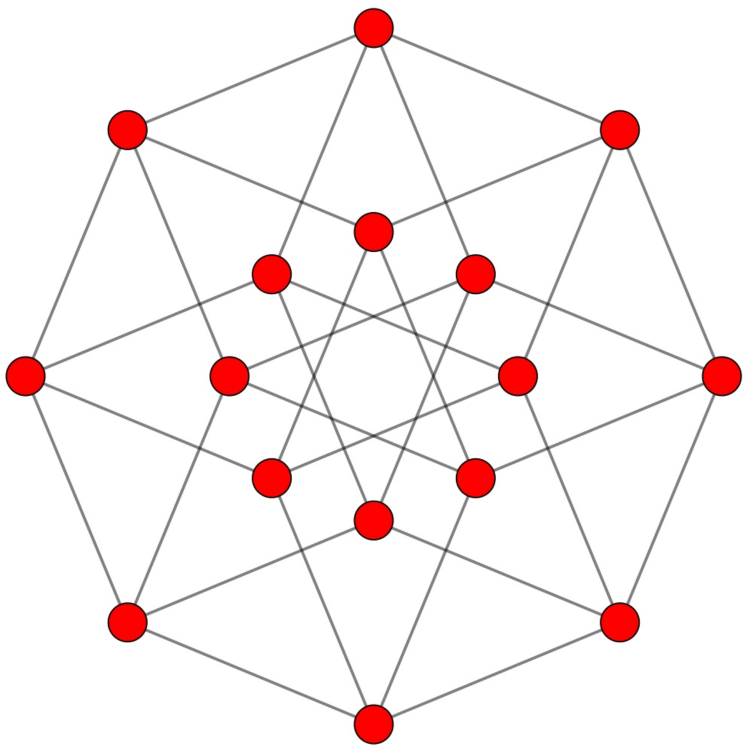
4次元ユークリッド空間で
(1, 1, 1, 1) および座標の符号を変えた16個の点を
頂点にもつ.

頂点の座標

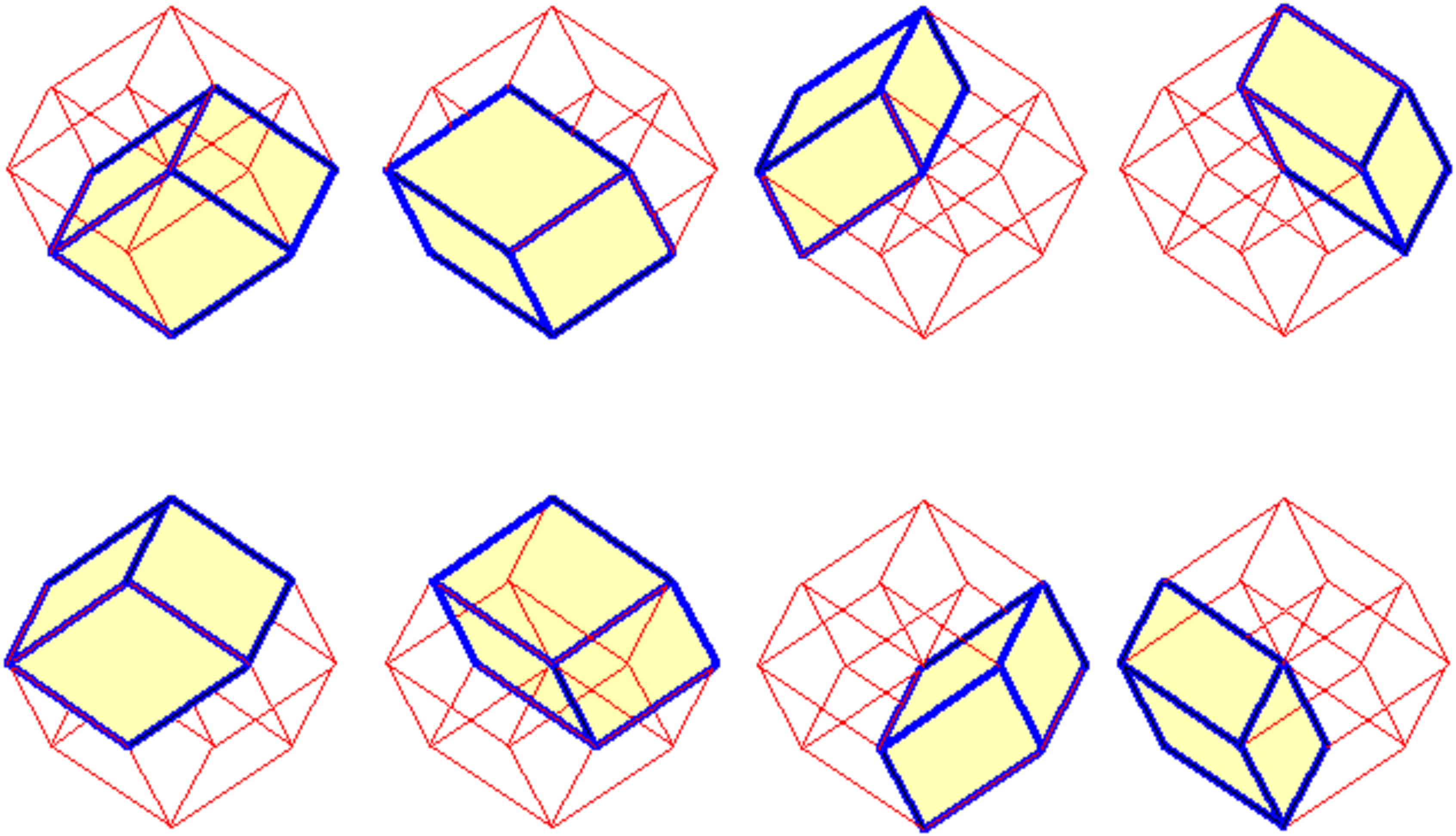
$$(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1)$$

4次元立方体の射影図

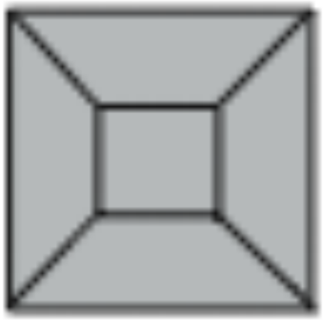




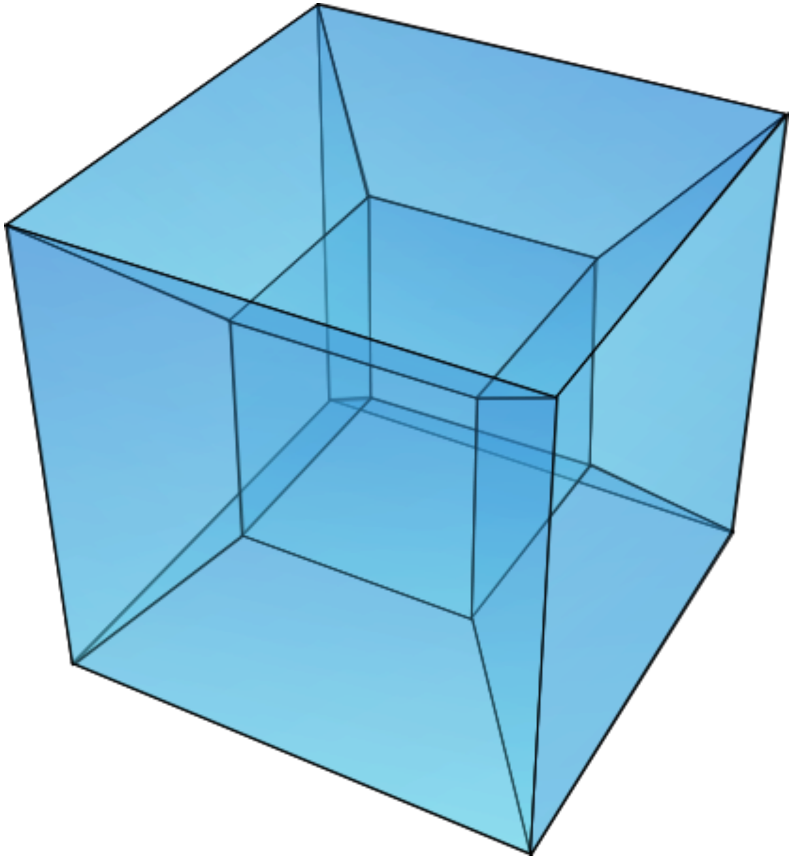
4次元立方体に含まれる8個の立方体



4次元立方体のシュレーゲル図式



立方体の射影図



0-セル（頂点）	16
1-セル（辺）	32
2-セル（面）	24
3-セル	8

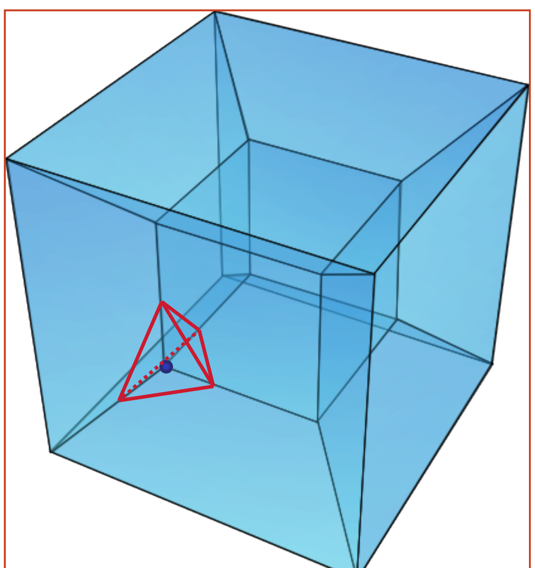
Hypercubeの回転

4次元空間の正多胞体のシュレフリー記号

シュレフリー記号 {p, q, r}

正多面体 {p, q} が辺のまわりに r 個集まる.

各頂点のまわりの切り口のタイプが {q, r}.



3次元空間の分割: 正多胞体

正8胞体 (hypercube)

{4, 3, 3}

シュレフリー記号 {p, q, r} で表される4次元正多胞体が存在するための必要条件

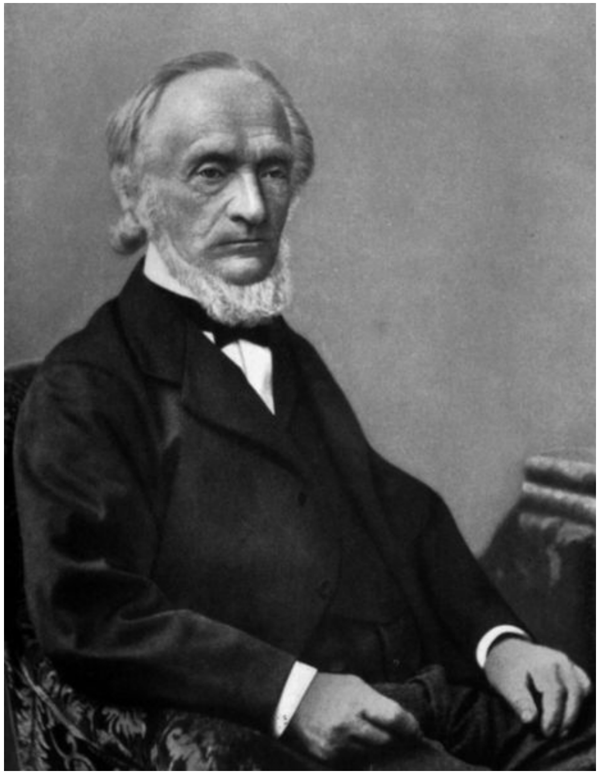
$$\sin\frac{\pi}{p}\sin\frac{\pi}{r} > \cos\frac{\pi}{q}$$

この不等式の導出については次回説明する.

4次元空間の正多胞体(regular polytope)の分類

	シュレフリー記号	3-セル	頂点数
正5胞体	{3, 3, 3}	正4面体	5
正8胞体	{4, 3, 3}	立方体	16
正16胞体	{3, 3, 4}	正4面体	8
正24胞体	{3, 4, 3}	正8面体	24
正120胞体	{5, 3, 3}	正12面体	600
正600胞体	{3, 3, 5}	正4面体	120

シュレフリーにより19世紀半ばに示された.



Ludwig Schläfli (1814 - 1895)

Theorie der vielfachen Kontinuität 1850 - 52

Riemann : *Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen* 1854

正16胞体

正8面体の4次元版

3次元ユークリッド空間の
正8面体として頂点の座標を

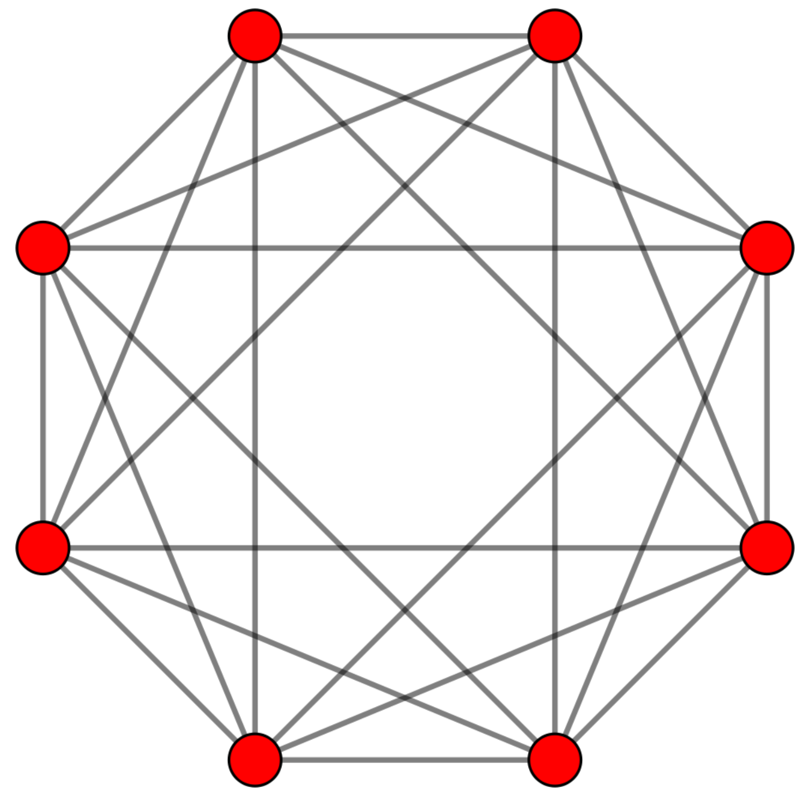
$$(\pm 2, 0, 0)$$

およびこれらの座標の入れ替
えからなる6点をとる.

4次元ユークリッド空間で
頂点の座標を

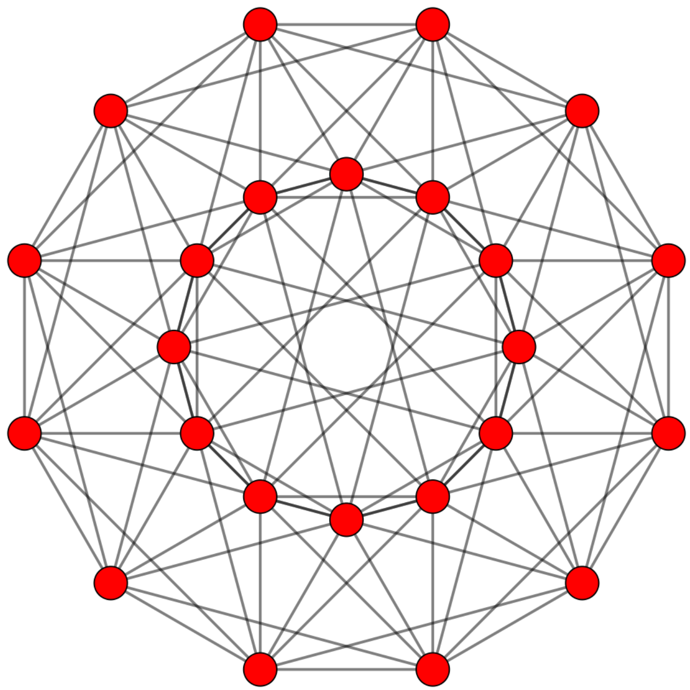
$$(\pm 2, 0, 0, 0)$$

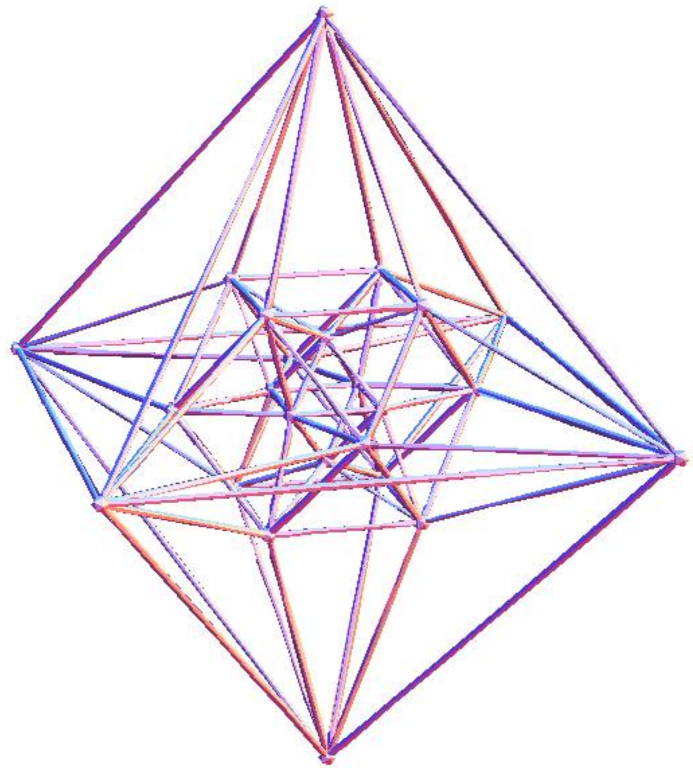
およびこれらの座標の入れ替
えからなる8点をとる.



正16胞体の射影図

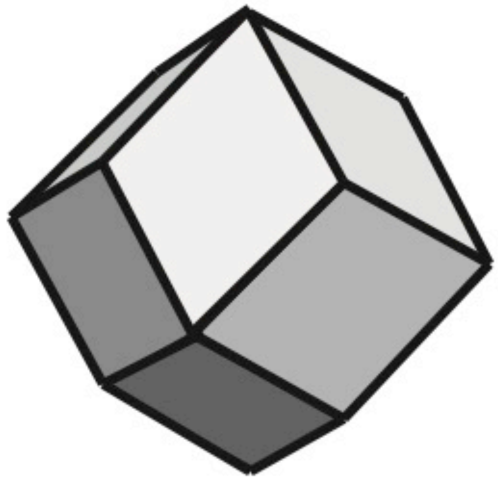
正24胞体

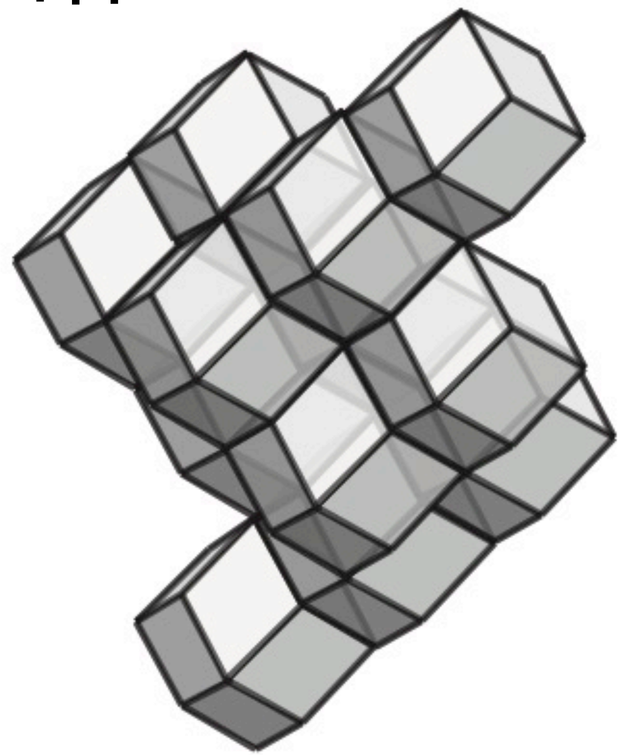


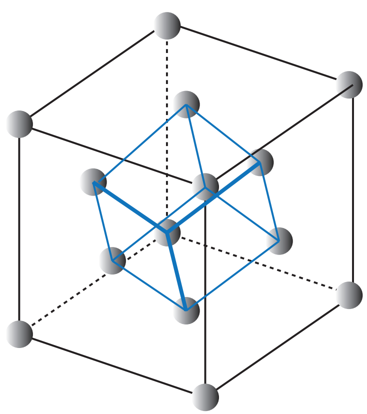


正8胞体（hypercube）と正16胞体の頂点をこれまでのように4次元ユークリッド空間にとり，それらの和集合を頂点にとる．3次元の正多面体には対応物がない．

菱形12面体

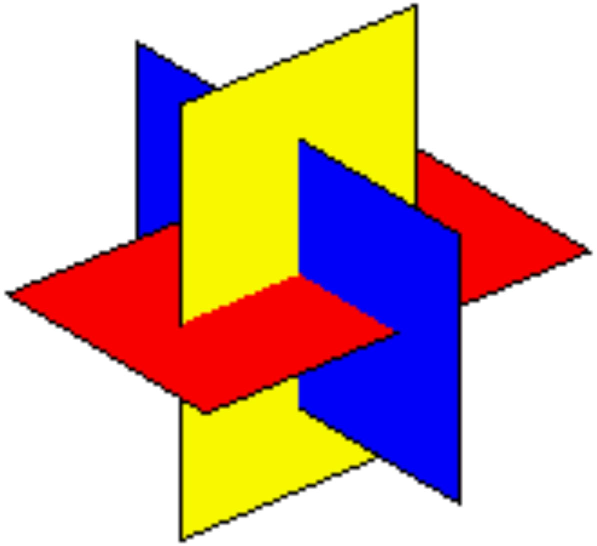


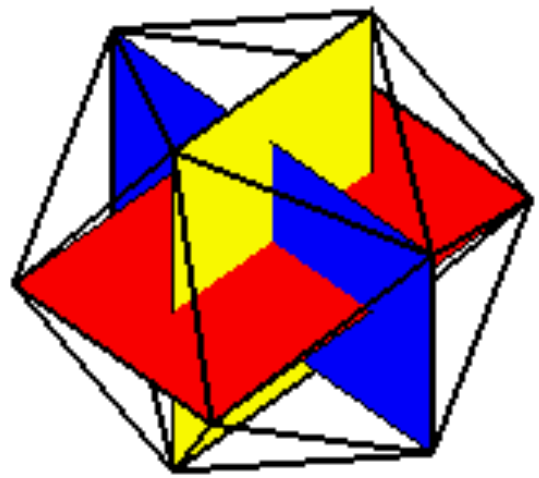




3次元ユークリッド空間で立方体と正8面体から同様の構成をすると菱形12面体が得られる. これは面心立方格子のディリクレ領域であり, 空間を埋め尽くす多面体.
（坪井先生の3回目の講義を参照）

3次元空間に正20面体の頂点をとる





黄金比 $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

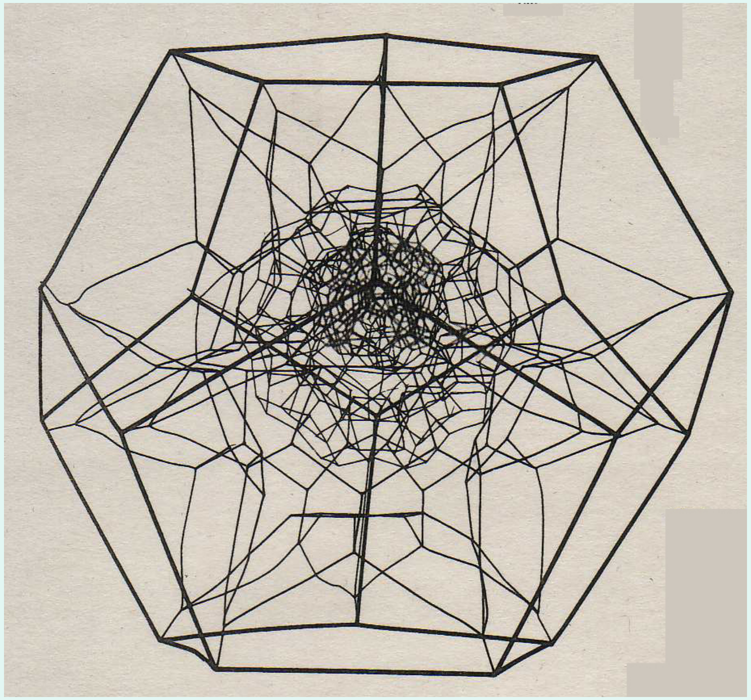
縦横比が黄金比であるような長方形3枚を上の図のように組み合わせる.

正20面体の頂点の座標として

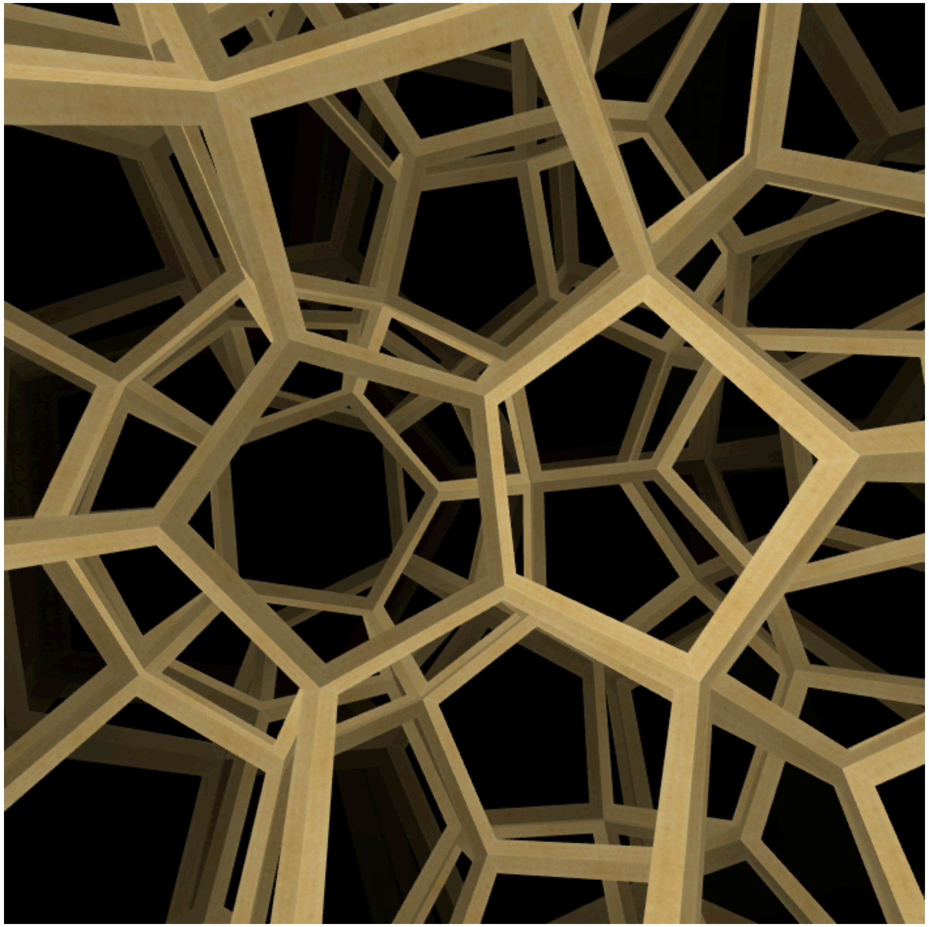
$$(\pm 1, \pm \tau, 0)$$

およびこれらの入れ替えがとれる.

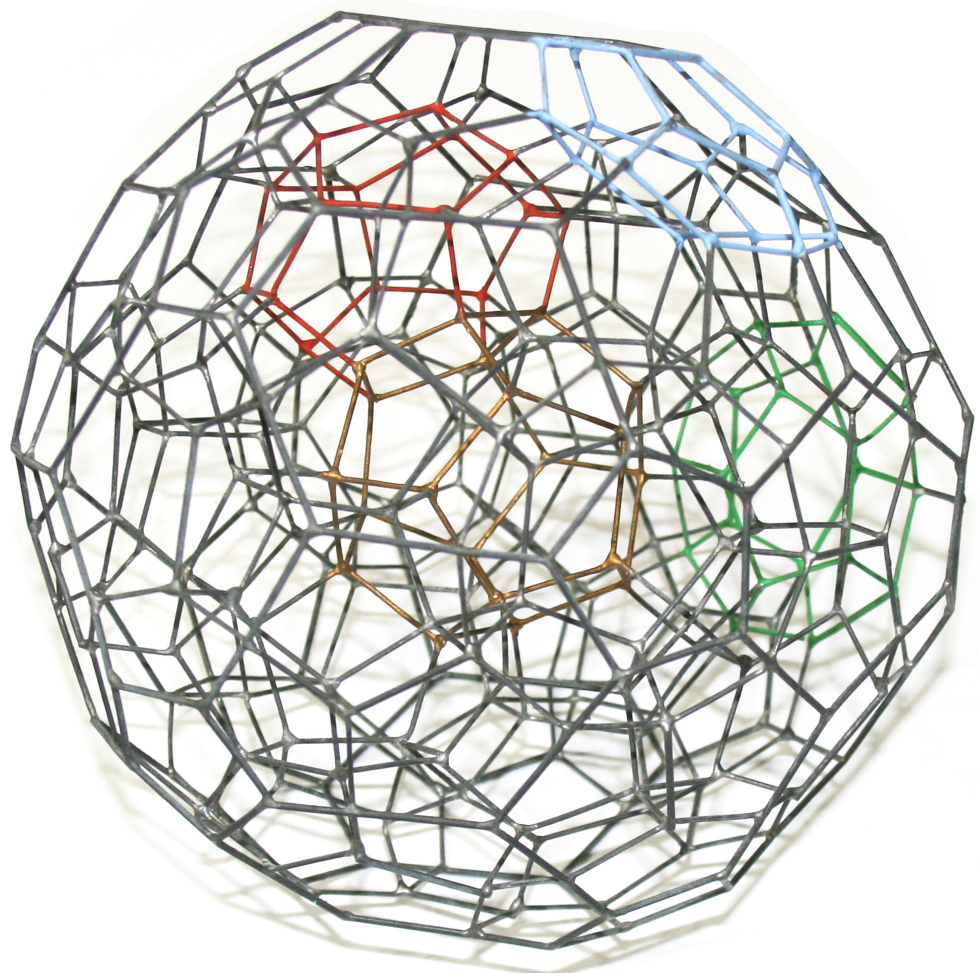
東大数理所蔵の正120胞体の模型



正120胞体
{5, 3, 3}



J. Weeks, Curved Spaceによる



乙部融朗氏による正120胞体の模型

課題

1. ビデオ　Dimensions

http://faculty.ms.u-tokyo.ac.jp/~dim_jp/

の第1章から第4章までを見る.

2. J. Weeksのよる Curved Space

http://geometrygames.org/CurvedSpaces/index.html.ja

Spherical, Binary Icosahedral L を観察.

3. 縦横比が黄金比の長方形3枚に右図のように切れ込みをいれて組み合わせ正20面体の頂点を作成.