幾何学II　演習の解説（10/1）

平成 15 年 10 月 21 日

1

(1) 商位相の定義

$p : X \to X/\sim$ を標準的な全射とします。つまり $p(x) = [x]$（$x \in X$ の同値類）です。$X/\sim$ の部分集合 A について

$$A \text{ が開集合} \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad p^{-1}(A) \subset X \text{ が開集合}$$

と定義します。これが実際に $X/\sim$ に位相を定義すること、つまり

- $\emptyset$ および X は開集合
- $A_1, A_2, \cdots, A_k \subset X/\sim$ が開集合なら $\bigcap_{i=1}^{k} A_i$ も開集合
- $A_1, A_2, \cdots \subset X/\sim$ が開集合なら $\bigcup_i A_i$ も開集合

を確かめてみて下さい。

(2) 商空間の Hausdorff 性

$q = re^{2\pi i\theta}$（$r > 0,\ 0 \leq \theta < 1$）とおきます。$X/\sim$ が Hausdorff に**ならない**条件は

$$r = 1 \quad \text{かつ} \quad \theta \notin \mathbb{Q}$$

です。これを示しましょう。

$r \neq 1$ のとき

$[z], [w] \in X/\sim$ を相異なる 2 点とします。これらの開近傍 $U, V \subset X/\sim$ で $U \cap V = \emptyset$ となるものを構成します。$z, w \in X = \mathbb{C} - \{0\}$ を中心とする半径 r_1, r_2 の開円盤 D_1, D_2 で、任意の $k \in \mathbb{Z}$ について

$$D_1 \cap q^k D_2 = \emptyset \tag{1}$$

（$q^k D_2$ は $q^k w$ を中心とし半径 $r^k r_2$ の開円盤）となるようなものを取ります（$r \neq 1$ なら、このようにできます）。

$p : X \to X/\sim$ を標準的な射影とすると、$U = p(D_1), V = p(D_2)$ は $X/\sim$ における $[z], [w]$ の開近傍です。実際

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} q^k D_1$$

で、各 $q^k D_1$ は開集合なので $p^{-1}(U)$ は開集合、従って $U \subset X/\sim$ は開集合です。V についても同様です。この U, V が求めるものです。実際、任意の $m, n \in \mathbb{Z}$ について

$$q^m D_1 \cap q^n D_2 = \emptyset \tag{2}$$

であることがわかり、これにより $U \cap V = \emptyset$ がいえます。

(2) を示します。ある $m, n \in \mathbb{Z}$ について、$q^m D_1 \cap q^n D_2 \neq \emptyset$ となったと仮定します。$v \in q^m D_1 \cap q^n D_2$ を任意に取ります。$v \in q^n D_2$ より、$u = q^{-n} v$ とおくと $u \in D_2$ です。一方 $v \in q^m D_1$ より $q^{-m} v \in D_1$ です。従って、$u \in D_2$ は

$$q^{n-m} u = q^{-m} v \in D_1$$

を満たします。これは $D_1 \cap q^{n-m} D_2 \neq \emptyset$ を意味し、D_1, D_2 の取り方 (1) に反します。従って任意の $m, n \in \mathbb{Z}$ について $q^m D_1 \cap q^n D_2 = \emptyset$ となります。

<u>$r = 1, \theta \in \mathbb{Q}$ のとき</u>

上の証明をよく見ると、$z, w \in X$ を中心とする開円盤 D_1, D_2 で、任意の $k \in \mathbb{Z}$ について $D_1 \cap q^k D_2 = \emptyset$ であるものを取れれば、$X/\sim$ が Hausdorff になることがわかります。$r = 1$ でも $\theta \in \mathbb{Q}$ ならば、このような D_1, D_2 を取れることを見てみましょう。

$\theta \in \mathbb{Q}$ ですから、$\theta = m/n$（m, n は正の整数で $m < n$）と書けます。このとき $q = re^{2\pi i\theta} = e^{2\pi i m/n}$ は $q^n = 1$ を満たします。よって、$z \in X$ の同値類は高々

$$z,\ qz\ ,\ \ldots\ ,\ q^{n-1} z$$

の n 個からなります。w についても同様です。同値類がともに有限個からなるので

$$r = \frac{1}{2} \mathrm{min}_{m,n \in \mathbb{Z}} |q^m z - q^n w|$$

が存在します。この r より小さい半径の D_1, D_2 を取れば、後は上と全く同様に $X/\sim$ が Hausdorff であることを証明できます。

<u>$r=1, \theta \notin \mathbb{Q}$ のとき</u>

上のような D_1, D_2 が取れないことを示します。例えば $z=1$ とします。1 の同値類 $\{q^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は全て半径 1 の円周 S^1 上にあり、しかも任意の $k \in \mathbb{Z}$ について $q^k \neq 1$ なので、同値類は無限個の数を含みます。さらに良く知られた事実として、1 の同値類 $\{q^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は S^1 の中で稠密です（例えば、松本幸夫著「多様体の基礎」補題 12.d 参照)。特に 1 と $e^{2\pi im/n} \in X$ について、どれほど小さい開近傍 D_1, D_2 を取っても、ある整数 N について $D_1 \cap q^N D_2 \neq \emptyset$ となります。このことから $[1], [e^{2\pi im/n}] \in X/\sim$ のいかなる開近傍も空でない共通部分を持つことが従い、$X/\sim$ は Hausdorff にはなりません。

2

1. 実射影空間 $\mathbb{R}P^n$ の定義を述べよ.

n 次元球面

$$S^n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} | x_1^2 + \cdots L x_{n+1}^2 = 1\}$$

に対して, 対蹠点写像 $-$ を次のように定義します.

$$- : S^n \to S^n \quad x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \mapsto -x = (-x_1, \ldots, -x_{n+1}).$$

このとき, S^n 上の 2 点 x, y に対して関係 $x \sim y$ を $x = y$ または $-y$ によって定義すると, これは同値関係になります.

この同値関係によって S^n から導かれる商位相空間を n 次元実射影空間 $\mathbb{R}P^n$ と定義します. つまり,

$$\mathbb{R}P^n := S^n/\sim.$$

2. $\mathbb{R}P^n$ はコンパクトな可微分多様体であることを証明せよ.

$p : S^n \to \mathbb{R}P^n$ を上の同値関係によって導かれる射影とします.

I. $\mathbb{R}P^n$ がコンパクトであることの証明.

$\mathcal{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を $\mathbb{R}P^n$ の任意の開被覆とします. p は全射なので

$$p^{-1}(\mathcal{U}) = \{p^{-1}(U_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$$

は S^n の開被覆を定めます. S^n はコンパクトなので, 開被覆 $p^{-1}(\mathcal{U})$ から適当な有限個の開集合 $p^{-1}(U_{\lambda_1}), \ldots, p^{-1}(U_{\lambda_k})$ が S^n をの開被覆になるように選ぶことができます. このとき,

$$p(S^n) = p(\bigcup_{i=1}^k p^{-1}(U_{\lambda_i})) = \bigcup_{i=1}^k U_{\lambda_i} = \mathbb{R}P^n$$

ですから, $\mathcal{U}$ から開集合 $U_{\lambda_1}, \ldots U_{\lambda_k}$ を選ぶことによって $\mathbb{R}P^n$ を覆うことができます. 開被覆 $\mathcal{U}$ は任意に選んだので, これにより $\mathbb{R}P^n$ がコンパクトで

あることが示されました.
II. $\mathbb{R}P^n$ が可微分多様体であることの証明.
i) $\mathbb{R}P^n$ が Hausdorff 空間であることの証明.
　$\mathbb{R}P^n$ 上の異なる 2 点 x_1, x_2 を任意に選びます. また, $\tilde{x}_i \in S^n$ を

$$p(\tilde{x}_i) = x_i$$

となる S^n 上の 1 点とします. このとき, 同値類の定義の仕方から

$$p^{-1}(x_i) = \{\tilde{x}_i, -\tilde{x}_i\},$$

となります. このとき, S^n が Hausdorff 空間であることと対蹠点写像が同相であることを用いると, 各 $\tilde{x}_i$ の開近傍 $U_{\tilde{x}_i}$ と $-\tilde{x}_i$ の開近傍 $U_{-\tilde{x}_i}$ を

- $U_{\tilde{x}_i} \cap U_{-\tilde{x}_j} = \emptyset \ (i, j = 1, 2)$,
- $-U_{\tilde{x}_i} = U_{-\tilde{x}_i}$

となるように取ることができます.
　ここで, $\mathbb{R}P^n$ 上の点 x_i の開近傍 U_i を

$$U_i := p(U_{\tilde{x}_i})$$

によって定義します. このとき

$$p^{-1}(U_i) = U_{\tilde{x}_i} \cup -U_{\tilde{x}_i}$$

ですから, 逆像が open なので U_i は x_i 上の開近傍をなします. また

$$p^{-1}(U_1 \cap U_2) = \bigcap_{i=1,2} (U_{\tilde{x}_i} \cup -U_{\tilde{x}_i}) = \emptyset$$

ですから,

$$U_1 \cap U_2 = \emptyset.$$

x_1, x_2 は $\mathbb{R}P^n$ の任意の異なる 2 点を取ったので $\mathbb{R}P^n$ は Hausdorff 空間であることが示されました.
ii) $\mathbb{R}P^n$ の局所座標系
　S^n の開集合 $\tilde{V}_k \ (k = 1, \ldots, n+1)$ を

$$\tilde{V}_k := \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in S^n | x_k \neq 0\}$$

によって定義します. また, $\mathbb{R}P^n$ の開集合 V_k を

$$V_k := p(\tilde{V}_k)$$

とします. ($-\tilde{V}_k = \tilde{V}_k$ より $p^{-1}(V_k) = \tilde{V}_k$ ですから, V_k は $\mathbb{R}P^n$ の開集合です.) このとき, 連続写像 $\tilde{\varphi}_k : \tilde{V}_k \to \mathbb{R}^n$ を次のように定義します.

$$\tilde{\varphi}_k(x_1, \ldots, x_{n+1}) = (\frac{x_1}{x_k}, \ldots, \frac{x_{k-1}}{x_k}, \frac{x_{k+1}}{x_k}, \ldots, \frac{x_{n+1}}{x_k}).$$

このとき, $\tilde{\varphi}_k$ は同値関係 $\sim$ について閉じていますから, $\tilde{\varphi}_k$ から連続写像

$$\varphi_k : V_k \to \mathbb{R}^n$$

が誘導されます. ($\tilde{\varphi}_k = \varphi_k \circ p$)

ここで, $\{(V_k, \varphi_k)\}$ が $\mathbb{R}P^n$ の局所座標系になることを証明します.

まず, $\bigcup_{k=1}^{n+1} \tilde{V}_k = S^n$ ですから,

$$\mathbb{R}P^n = p(S^n) = \bigcup_{k=1}^{n+1} p(\tilde{V}_k) = \bigcup_{k=1}^{n+1} V_k$$

となり, $\mathbb{R}P^n$ は $\{V_k\}_{k=1}^{n+1}$ で被覆されることが分かりました.

次に各 φ_k が同相であることを示します.

$\mathbb{R}^n$ の座標を $(y_1, \ldots, y_n)$ とし, $\varphi'_k : \mathbb{R}^n \to V_k$ を次のように定めます.

$$\varphi'_k(y_1, \ldots y_n) = p\left(r^{-\frac{1}{2}}(y_1, \ldots, y_{k-1}, 1, y_k, \ldots, y_n)\right).$$

ここで, r は以下のとおりに定められたものです.

$$r = 1 + y_1^2 + \cdots + y_n^2.$$

構成の仕方から φ'_k は連続で,

$$\varphi_k \circ \varphi'_k(y_1, \ldots, y_n) = (y_1, \ldots, y_n)$$
$$\varphi'_k \circ \varphi_k(p(x_1, \ldots, x_{n+1})) = p(x_1, \ldots, x_{n+1})$$

ですから, $\varphi'_k = \varphi_k^{-1}$ が分かります. これにより φ_k は全単射で, 連続な逆写像を持ちますから, 同相写像になります.

最後に座標変換が可微分であることを見ます. $k < l$ の場合, $V_k \cap V_l \neq \emptyset$ で,

$$\varphi_l(V_k \cap V_l) = \{(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n | y_k \neq 0\}$$

となります. ここで $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \varphi_l(V_k \cap V_l)$ について

$$\begin{aligned}\varphi_k \circ \varphi_l^{-1}(y) &= \varphi_k r^{-\frac{1}{2}}(y_1, \ldots, y_{l-1}, 1, y_l, \ldots, y_n) \\ &= (\frac{y_1}{y_k}, \ldots, \frac{y_{k-1}}{y_k}, \frac{y_{k+1}}{y_k}, \ldots, \frac{y_{l-1}}{y_k}, \frac{1}{y_k}, \frac{y_l}{y_k}, \ldots, \frac{y_n}{y_k}).\end{aligned}$$

この写像の定義域は $y_k \neq 0$ でしたから, この写像は C^∞-級の写像になります. また, $k > l$ の場合もほとんど同じようにして座標変換が C^∞-級 の写像になることが確かめられます. (因みに, 導かれる式だけ書くと

$$\varphi_k \circ \varphi_l^{-1}(y) = (\frac{y_1}{y_{k-1}}, \ldots, \frac{y_{l-1}}{y_{k-1}}, \frac{1}{y_{k-1}}, \frac{y_l}{y_{k-1}}, \ldots, \frac{y_{k-2}}{y_{k-1}}, \frac{y_k}{y_{k-1}}, \ldots, \frac{y_n}{y_k}).$$

となります. 定義域は $y_{k-1} \neq 0$) よって任意の座標変換が可微分であることが証明できました.

以上により, 実射影空間 $\mathbb{R}P^n$ はコンパクトな可微分多様体であることが示されました.

3. $\mathbb{R}P^1$ は S^1 と同相であることを証明せよ.

$\mathbb{R}$ に同値関係 $xRy \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$ をいれ, S^1 をこの同値関係により定義される商空間

$$S^1 = \mathbb{R}/R$$

とみて, S^1 上の点を $e(t) := (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ と表わします. このとき, 連続写像 $\tilde{\psi} : S^1 \to S^1$ を

$$\tilde{\psi} : S^1 \to S^1 \quad e(t) \mapsto e(2t)$$

と定義します. 定義からこの写像は開写像になっています. また

$$\tilde{\psi}(-e(t)) = \tilde{\psi}(e(t))$$

なので, $\tilde{\psi}$ は同値関係 $\sim$ に関して閉じているので, 連続写像

$$\psi : \mathbb{R}P^1 \to S^1$$

が誘導されます. このとき商位相の定義と $\tilde{\psi}$ が開写像であることから, ψ も開写像であることが分かります.

ψ が連続な開写像であることがいえたので, 後は ψ が全単射であることを言えば同相であることが示されます. ここで, $\psi' : S^1 \to \mathbb{R}P^1$ を次のように定義します.

$$\psi' : S^1 \to \mathbb{R}P^1 \quad e(t) \mapsto p(e(\frac{t}{2}))$$

まず, $\psi'(e(t+1)) = \psi'(e(t))$ が成立しますからこの写像は well-defined です. また

$$\psi' \circ \psi(p(e(t))) = p(e(t)) \quad \psi \circ \psi'(e(t)) = e(t)$$

ですから, $\psi' = \psi^{-1}$ が分かります. このことから ψ が全単射であることが分かりました.

以上により $\mathbb{R}P^1$ と S^1 が同相であることが示されました.

4. n が奇数のとき, $\mathbb{R}P^n$ は向き付け可能であることを証明せよ.

始めに 2. で取った座標近傍に関して Jacobian を計算してみましょう. $k<l$ のときは

$$J(\varphi_k \circ \varphi_l^{-1}) = (-1)^{k+l} \left(\frac{1}{y_k}\right)^{n+1}$$

$k>l$ のときは

$$J(\varphi_k \circ \varphi_l^{-1}) = (-1)^{k+l} \left(\frac{1}{y_{k-1}}\right)^{n+1}$$

より, このままだと l, k によって Jacobian の正負が変わってしまいます. そこで, φ_k たちを少し変えてしまいます. $\tilde{\phi}_k : \tilde{V}_k \to \mathbb{R}^n$ を次のように定義します.

$$\tilde{\phi}_k := \begin{cases} \tilde{\varphi}_k & k \text{ が奇数のとき} \\ -\tilde{\varphi}_k & k \text{ が偶数のとき} \end{cases}$$

このとき前と同様にして $\phi_k : \mathbb{R}P^n \to \mathbb{R}^n$ が導かれ, $\{(V_k, \phi_k)\}$ が $\mathbb{R}P^n$ の局所座標系になります. この ϕ_k たちについて座標変換の Jacobian を計算すると, $k>l$ の場合

$$J(\phi_k \circ \phi_l^{-1}) = \frac{1}{y_k^{n+1}}$$

$k<l$ の場合

$$J(\phi_k \circ \phi_l^{-1}) = \frac{1}{y_{k-1}^{n+1}}$$

となります. n は奇数でしたから $y_k^{n+1} > 0$, $y_{k-1}^{n+1} > 0$ となります. よって, 座標変換の Jacobian が全て正になるような局所座標系が存在するので, n が奇数の時は $\mathbb{R}P^n$ は向き付け可能になります.

補足: 実射影空間 $\mathbb{R}P^n$ は次のようにしても定義できます. (おそらくこちらのほうが一般的です) $x, y \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ に対して $x \sim y$ を

$$x \sim y \Leftrightarrow \text{ある実数 } \lambda \neq 0 \text{ が存在して } x = \lambda y$$

で定義します. このとき, 容易に $\sim$ が同値関係であることが確かめられます. この同値関係によって $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ から導かれる商空間を実射影空間 $\mathbb{R}P^n$ と定義します.

$$\mathbb{R}P^n := (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim$$

この実射影空間の定義と解答の定義が一致することを確かめてみてください.