5. ホモロジー完全列 (2)
Mayer-Vietoris完全列，いくつかの計算例

1　Mayer-Vietoris 完全列

K を単体的複体，K_1, K_2 を K の部分複体で $K = K_1 \cup K_2$ を満たすとする．$i_1 : K_1 \cap K_2 \to K_1$, $i_2 : K_1 \cap K_2 \to K_2$, $j_1 : K_1 \to K$, $j_2 : K_2 \to K$ をそれぞれ包含写像とすると，チェイン複体の短完全列

$$0 \longrightarrow C(K_1 \cap K_2) \xrightarrow{\alpha} C(K_1) \oplus C(K_2) \xrightarrow{\beta} C(K) \longrightarrow 0$$

が存在する．ここで，

$$\alpha(x) = (i_1)_*(x) \oplus (i_2)_*(x), \quad \beta(x \oplus y) = (j_1)_*(x) - (j_2)_*(y)$$

である．これより，次の **Mayer-Vietoris ホモロジー完全列**が導かれる．

定理 1. 以下の完全列が存在する．

$$\cdots \xrightarrow{\partial_*} H_q(K_1 \cap K_2) \xrightarrow{\alpha_*} H_q(K_1) \oplus H_q(K_2) \xrightarrow{\beta_*} H_q(K) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(K_1 \cap K_2) \longrightarrow \cdots$$

Euler 数については，

$$\chi(K) = \chi(K_1) + \chi(K_2) - \chi(K_1 \cap K_2)$$

が成立する．

2　いくつかの計算例

これまでの手法を用いて計算できる単体的複体のホモロジー群の例を挙げる．

錐複体のホモロジー群が 1 点のホモロジー群と同型であることを用いると n 次元単体 σ について，σ の定める単体的複体 $K(\sigma) = \{\ \tau \mid \tau \prec \sigma\}$ のホモロジー群は

$$H_q(K(\sigma)) = \begin{cases} \mathbf{Z} & q = 0 \\ 0 & q \neq 0 \end{cases}$$

となることがわかる．また，対応するチェイン複体の $n-1$ 次以下の部分に注目すると $K(\sigma)$ の $(n-1)$-skeleton のホモロジー群は，$n > 1$ のとき

$$H_q(K(\sigma)^{(n-1)}) = \begin{cases} \mathbf{Z} & q = 0, n-1 \\ 0 & q \neq 0, n-1 \end{cases}$$

となる．ここで，次の同相が存在する

$$|K(\sigma)| \cong D^n, \quad |K(\sigma)^{(n-1)}| \cong S^{n-1}$$

ここで，D^n は n 次元球体, S^{n-1} は $n-1$ 次元球面である．この単体分割について対 D^n, S^{n-1} のホモロジー完全列を用いると

$$H_q(D^n, S^{n-1}) = \begin{cases} \mathbf{Z} & q = n \\ 0 & q \neq n \end{cases}$$

が得られる．

演習で構成した単体分割を用いて Mayer-Vietoris 完全列を適用するとトーラスと実射影平面のホモロジー群について次のような結果が得られる．三角形分割によらないことは後に証明する．

$$H_q(S^1 \times S^1) = \begin{cases} \mathbf{Z} & q = 0 \\ \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} & q = 1 \\ \mathbf{Z} & q = 2 \end{cases}$$

$$H_q(\mathbf{R}P^2) = \begin{cases} \mathbf{Z} & q = 0 \\ \mathbf{Z_2} & q = 1 \\ 0 & q = 2 \end{cases}$$