4. ホモロジー完全列 (1)

1 完全列

加群とその準同型からなる列

$$\cdots \longrightarrow M_{q+1} \xrightarrow{f_{q+1}} M_q \xrightarrow{f_q} M_{q-1} \longrightarrow \cdots$$

において，各 q に対して $\mathrm{Ker} f_q = \mathrm{Im} f_{q+1}$ が成り立つときこれを加群の**完全列** (exact sequence) という．とくに加群の完全列

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} M' \xrightarrow{j} M'' \longrightarrow 0$$

を加群の短完全列という．これは i が単射で j が全射であることを意味する．

チェイン複体とチェイン写像の列

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{i} C' \xrightarrow{j} C'' \longrightarrow 0$$

は，各 q に対し

$$0 \longrightarrow C_q \xrightarrow{i} C'_q \xrightarrow{j} C''_q \longrightarrow 0$$

が加群の短完全列であるとき，チェイン複体の完全列とよばれる．

補題 1. 上のチェイン複体の完全列に対して，準同型写像

$$\partial_* : H_q(C'') \longrightarrow H_{q-1}(C)$$

が，$\partial_*[x] = [i^{-1} \circ \partial \circ j^{-1}(x)]$ によって定義される．

定理 1. チェイン複体の短完全列

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{i} C' \xrightarrow{j} C'' \longrightarrow 0$$

に対して

$$\cdots \xrightarrow{\partial_*} H_q(C) \xrightarrow{i_*} H_q(C') \xrightarrow{j_*} H_q(C'') \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(C) \longrightarrow \cdots$$

は完全列である．

2　単体的複体の対のホモロジー

K を単体的複体，L をその部分複体とする．チェイン複体

$$C_q(K, L) = C_q(K)/C_q(L)$$

のホモロジー群を単体的複体の対 (K, L) のホモロジーとよび，$H_q(K, L)$ で表す.

定理 2. 単体的複体の対 (K, L) に対して次の完全列が存在する．

$$\cdots \xrightarrow{\partial_*} H_q(L) \xrightarrow{i_*} H_q(K) \xrightarrow{j_*} H_q(K, L) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(L) \longrightarrow \cdots$$

前回配付分 2 ページ 4 行目は ($[a_0 \cdots a_n]$ は K の単体) に訂正して下さい．演習 3. 1 の「和集合」は「直積集合」に訂正.

講議の web page

http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~kohno/lectures/geom2.html