1. チェインホモトピーとその応用

1　ホモトピーの概念について

一般に，位相空間 X から Y への連続写像 f, g が**ホモトピー同値** (homotopic) であるとは，連続写像 $F : X \times I \to Y$ が存在して，$F(x, 0) = f(x), F(x, 1) = g(x)$ となることである．ここで $I = [0, 1]$ とした．連続写像 $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ があって $f \circ g$, $g \circ f$ がそれぞれ恒等写像とホモトピー同値であるとき，X と Y はホモトピー同形であるという．

ホモトピーの概念は，単体的複体と単体写像に対して次のように定義される．単体的複体 K について，直積 $|K| \times I$ は K の単体と

$$[\underline{a}_0 \cdots \underline{a}_i \overline{a}_i \cdots \overline{a}_n], \quad 0 \leq i \leq n$$

と表される単体による単体分割をもつ．ここで，$[a_0 \cdots a_n]$ は K の単体で $\underline{a}_i = a_i \times 0, \overline{a}_i = a_i \times 1$ とする．K, L を単体的複体として，その間の単体写像 f, g が**単体的ホモトピー同値**であるとは，単体写像 $F : |K| \times I \to Y$ が存在して，$F(x, 0) = f(x), F(x, 1) = g(x)$ となることである．このとき，自由加群の間の準同型写像 $\Phi : C_q(K) \to C_{q+1}(L)$ を

$$\Phi([a_0 \cdots a_q]) = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i F([\underline{a}_0 \cdots \underline{a}_i \overline{a}_i \cdots \overline{a}_q])$$

で定義すると，$f_*, g_* : C_q(K) \to C_q(L)$ は

$$\partial \circ \Phi + \Phi \circ \partial = g_* - f_*$$

を満たすことが示される．このとき，チェイン写像 f_*, g_* は**チェインホモトピー同値**であるという．以下が成立する．

定理 1. 単体的複体 K, L の間の写像 f, g が単体的ホモトピー同値ならば，f, g がホモロジー群に誘導する写像 $f_*, g_* : H_*(K) \to H_*(L)$ は互いに等しい．

2 いくつかの応用

K を単体的複体とする．新たに頂点 v を付け加えて K 上の v を頂点とする錐複体を $K * v$ で表す．ここで，$K * v$ は，K の単体と $[a_0 \cdots a_n v]$ ($[a_0 \cdots a_n$ は K の単体) と表される単体からなる．

命題 1. 錐複体 $K * v$ のホモロジー群は

$$H_q(K * v) = \begin{cases} \mathbf{Z}, & q = 0 \\ 0, & q \neq 0 \end{cases}$$

単体 $\sigma = [a_0 a_1 \cdots a_n]$ の重心を $b(\sigma)$ とする．σ の face の狭義の増大列

$$\sigma_0 \prec \sigma_1 \prec \cdots \prec \sigma_q$$

に対して，単体 $[b(\sigma_0) b(\sigma_1) \cdots b(\sigma_q)]$ を対応させる．このような単体全体からなる単体的複体を $\mathrm{Sd}(\sigma)$ と表す．また，単体的複体 K に対して

$$\mathrm{Sd}K = \bigcup_{\sigma \in K} \mathrm{Sd}(\sigma)$$

とおく．これは単体的複体となり，K の**重心細分**とよぶ．

定理 2. 単体的複体 K の重心細分 $\mathrm{Sd}K$ についてホモロジー群の同型

$$H_*(\mathrm{Sd}K) \cong H_*(K)$$

が成り立つ．

講義の web page
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/˜kohno/lectures/geom2.html