1. 単体的複体とそのホモロジー (2)

1　単体的複体についてのいくつかの用語

単体的複体 K について，その q-スケルトン (q-skeleton) とは，K に含まれる q 次元以下の単体全体の集合である．これは K の部分複体となる．一般に，位相空間 X に対して，同相写像 $t : |K| \to X$ が与えられているとき，これを X の単体的複体 K による**単体分割**または三角形分割とよぶ．

定義 1. *K, L を単体的複体とする．対応する多面体の間の写像 $f : |K| \to |L|$ が**単体写像**であるとは次の 3 条件を満たすことをいう．*

1. K の各頂点 v について，$f(v)$ は L の頂点である．
2. K の単体 $[a_0 \cdots a_q]$ について，頂点 $f(a_0), \cdots, f(a_q)$ は L のある単体に属する．
3. K の単体 $[a_0 \cdots a_q]$ に属する点 $x = \sum_{j=0}^{q} t_j a_j$ に対して，$f(x) = \sum_{j=0}^{q} t_j f(a_j)$ となる．

2　ベッチ数，オイラー数

K を n 次元有限単体的複体とする．アーベル群の基本定理により，ホモロジー群 $H_q(K)$ は標準形

$$H_q(K) \cong \mathbf{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}_{t_1} \oplus \mathbf{Z}_{t_2} \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}_{t_\delta}$$

で表される．ここで，$\mathbf{Z}_t$ は位数 t の巡回群で，t_j は t_{j+1} の約数である．$H_q(K)$ のランクつまり上の $\mathbf{Z}$ の現れる個数を K の q 次**ベッチ数** (Betti number) とよび，$b_q(K)$ で表す．また，$\mathbf{Z}_{t_1} \oplus \mathbf{Z}_{t_2} \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}_{t_\delta}$ を捩れ部分 (torsion part) とよぶ．交代和

$$\chi(K) = \sum_{q=0}^{n} (-1)^q b_q(K)$$

を K の**オイラー数** (Euler number) とよぶ.

命題 1. n 次元有限単体的複体 K について, q 単体の個数を $\alpha_q(K)$ とかくと

$$\chi(K) = \sum_{q=0}^{n}(-1)^q\alpha_q(K)$$

が成立する.

3 単体写像がホモロジー群に導く準同型写像

K, L を単体的複体, $f : |K| \to |L|$ を単体写像とする. K の単体 $[a_0 \cdots a_q]$ について,

$$f_*([a_0 \cdots a_q]) = [f(a_0) \cdots f(a_q)]$$

とおくことにより, 鎖群の準同型写像 $f_* : C_q(K) \to C_q(L)$ が定義される. ここで, 上の式で右辺の頂点に重複があるときは 0 と定める.

補題 1. f_* は境界作用素と可換である. つまり $\partial \circ f_* = f_* \circ \partial$ が成立する.

命題 2. 単体写像 $f : |K| \to |L|$ はホモロジー群の準同型写像

$$f_* : H_q(K) \to H_q(L)$$

を定め次の性質をもつ.

1. 恒等写像はホモロジー群の恒等写像を導く
2. 単体写像の合成 $f \circ g$ について $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$ が成立する.

前回配付分の一行目は "一般の位置にある $n+1$ 個の点" に訂正して下さい.
講義の web page

http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~kohno/lectures/geom2.html