1. 単体的複体とそのホモロジー (1)

1　単体的複体の定義

N 次元ユークリッド空間内の一般の位置にある $n+1$ 個の点 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ について，それらの凸包を $a_0, a_1, \cdots, a_n$ を頂点とする n 次元**単体** (simplex) といい $[a_0, a_1, \cdots, a_n]$ で表す．このような単体 $\sigma = [a_0, a_1, \cdots, a_n]$ について，頂点が $\{a_0, a_1, \cdots, a_n\}$ の部分集合で表されるような単体 τ を σ の**面** (face) といい，$\tau \prec \sigma$ と表す．

定義 1. *N 次元ユークリッド空間内の単体の集合 K が次の 3 条件を満たすとき，K は***単体的複体** *(simplicial complex) であるという．*

1. K の任意の単体について，その任意の面は K に属する．
2. K の 2 つの単体の共通部分は，それぞれの単体の面である．
3. （局所有限性）K の各単体について，それを面とする K の単体は有限個である．

K の部分集合 L がそれ自身単体的複体であるとき，L を K の**部分複体** (subcomplex) という．

$$|K| = \cup_{\sigma \in K} \sigma$$

を K の定める**多面体** (polyhedron) とよぶ．

2　鎖群と境界作用素，ホモロジー群の定義

単体的複体 K の q 次元単体全体と一対一に対応する基底をもつ自由加群を $C_q(K)$ とかき，K の q 次元**鎖群** (chain group) とよぶ．ここで，単体には向きを定めておく．単体 σ に対して向きを反対にしたものを $-\sigma$ で表す．頂点の順序に関して，

$$[a_{\pi(0)}, a_{\pi(1)}, \cdots, a_{\pi(n)}] = \mathrm{sign}(\pi)[a_0, a_1, \cdots, a_n]$$

と定める．ここで，π は $n+1$ 個の文字の置換である．

境界作用素 $\partial : C_n(K) \to C_{n-1}(K)$ を $\sigma = [a_0, a_1, \cdots, a_n]$ に対して

$$\partial\sigma = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i [a_0, \cdots, \widehat{a_i}, \cdots, a_n]$$

で定まる，自由加群の準同型として定義する．

補題 1. 境界作用素の合成について，$\partial \circ \partial = 0$ が成立する．

定義 2. 境界作用素を $\partial_q : C_q(K) \to C_{q-1}(K)$ で表し，∂_q の核を $Z_q(K)$, ∂_{q+1} の像を $B_q(K)$ とかく．

$$H_q(K) = Z_q(K)/B_q(K)$$

とおき，これを K の q 次元**ホモロジー群** *(homology group)* とよぶ．