

円の族を含む曲面と微分方程式

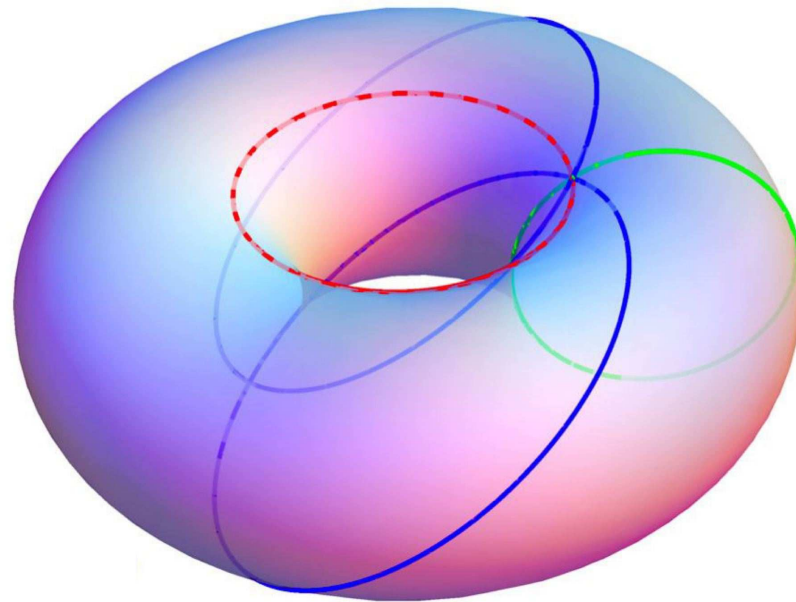
片岡 清臣 (東京大学大学院数理科学研究科)

東京大学大学院数理科学研究科公開講座「円と球の解析学」

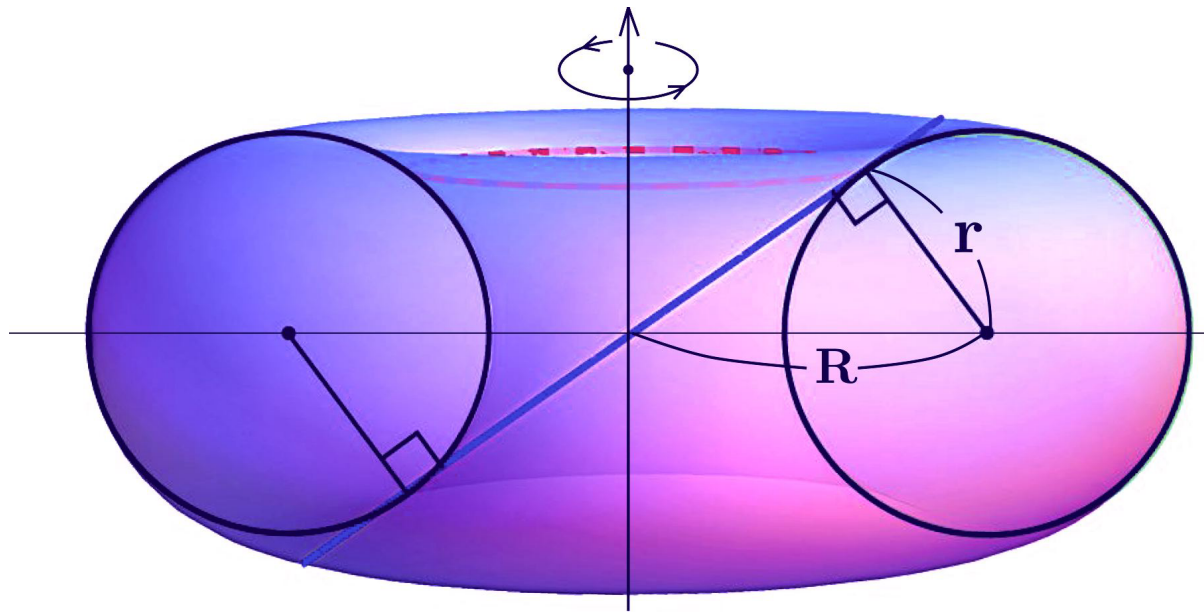
2013年11月23日

多種の円の族を含む曲面の例

[1] Yvon Villarceau, (1848): “Théorème sur le tore”. Nouvelles Annales de Mathématiques. Série 1, 7: 345-347.



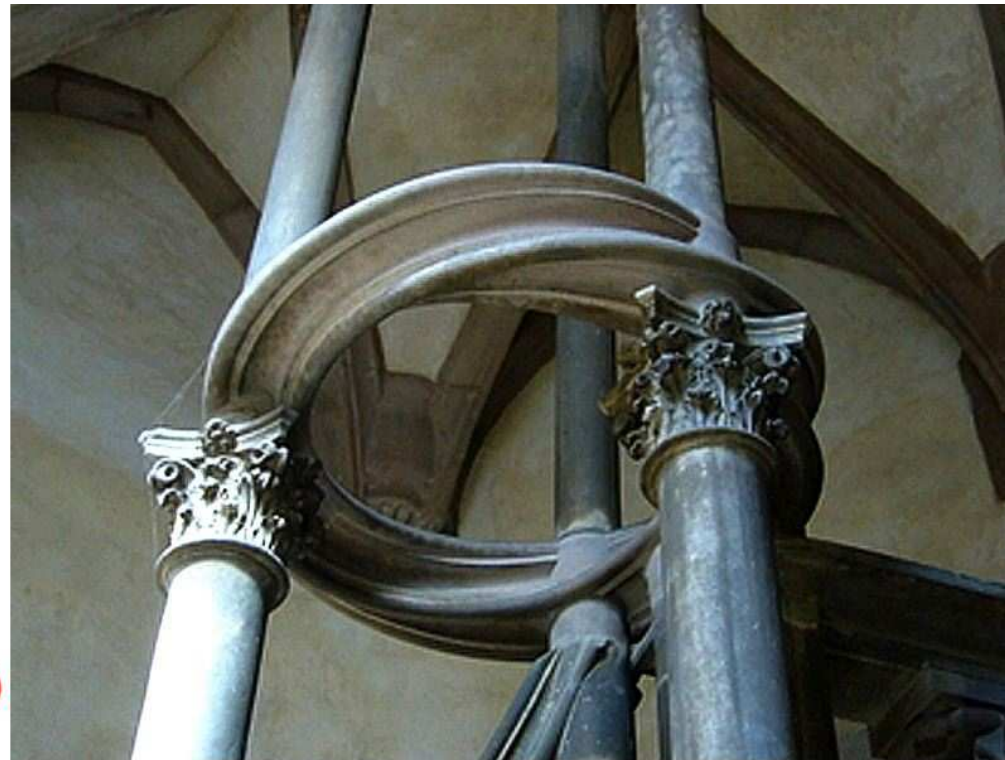
トーラス上の各点をとおる **4種類**の円の族
(青色の、傾いた円が Villarceau の円)



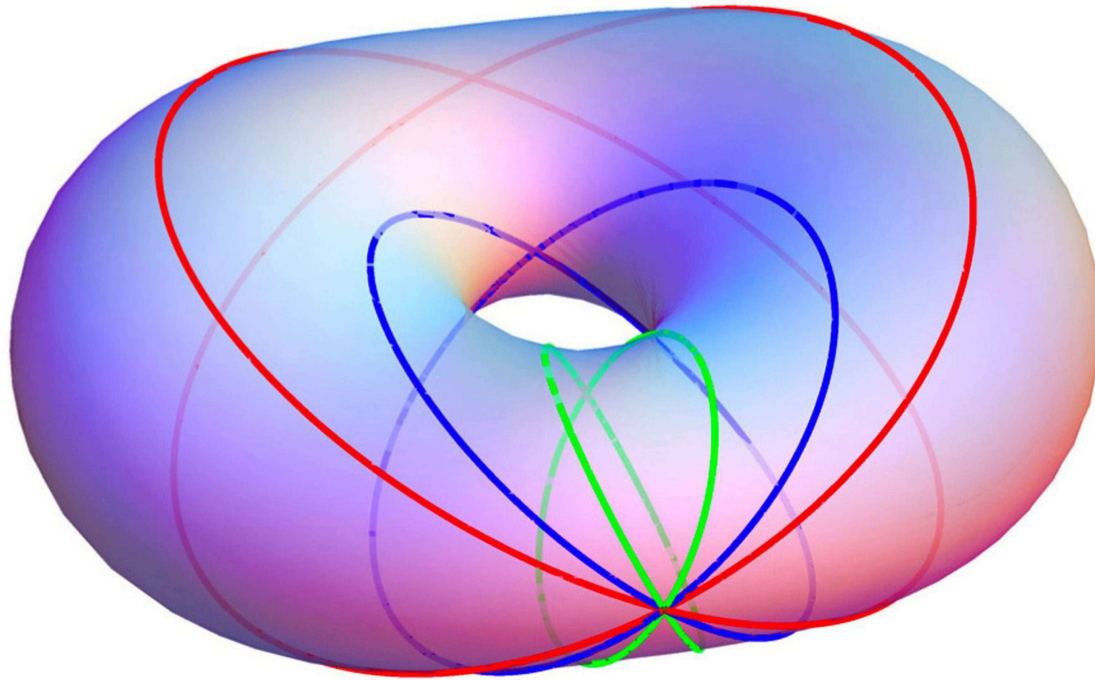
$$\begin{cases} (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 = r^2 & (z\text{-軸を回転軸とするトーラス}) \\ z = \pm \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}}x & (\text{青色の傾いた平面}) \end{cases}$$

Villarceau
Circles を用
いた16世紀
彫刻

ストラスブール大聖堂
(Dimensions webより)



[2] R. Blum's Cyclides (1980); "Circles on surfaces in the Euclidean 3-space", *Lecture Note in Math.* **792**, Springer, 213-221.



Blum cyclides の 1 例

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 - 6x^2 - 4y^2 + 4z^2 + 1 = 0.$$

各点を通る 6 種類の円の族を含む

Blum理論の復習

トーラスの方程式を次のように変形する：

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 = r^2.$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2 = 2R\sqrt{x^2 + y^2}.$$

さらに2乗すると

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2(R^2 + r^2)(x^2 + y^2) + 2(R^2 - r^2)z^2 + (R^2 - r^2)^2 = 0.$$

$0 < d < b \leq a$, $c < d$ としてこれを一般化したのがBlum曲面：

$$S : (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2ax^2 - 2by^2 - 2cz^2 + d^2 = 0.$$

トーラス $\iff a = b = R^2 + r^2$, $c = -(R^2 - r^2)$, $d = R^2 - r^2 > 0$

任意の点 $(x_0, y_0, z_0) \in S$ を固定して (x_0, y_0, z_0) を通り S に含まれる円の個数を調べる.

$\iff (x_0, y_0, z_0)$ を中心とする inversion を施し, S' と変換された曲面に対して S' に含まれる直線の数を数える.

$(x_0, y_0, z_0) \in S$ を中心とする inversion とは次の変換 $(S \iff S')$:

$$\left(x_0 + \frac{2R^2 x'}{x'^2 + y'^2 + z'^2}, y_0 + \frac{2R^2 y'}{x'^2 + y'^2 + z'^2}, z_0 + \frac{2R^2 z'}{x'^2 + y'^2 + z'^2} \right)$$

- 円または直線を円または直線に変換する
- (x', y', z') 空間の無限遠点を (x_0, y_0, z_0) に対応させる

R. Blumの予想 (1980)

3次元空間内の滑らかな閉曲面 S が、 S の各点に対してその点を通り、かつ S に含まれる7つの円をもてば S は球面である

部分的解決：種数が1以下の閉曲面に対して上記予想は真 (N. Takeuchi, Proc. AMS. **100**(1987), 145-147).

竹内伸子の予想 (2000)

3次元空間内の滑らかな閉曲面 S が、 S の各点に対してその点を通り、かつ S に含まれる2つの円をもてば S は **cyclide** である (Hokkaido Mathematical Journal ,**29**(1),2000).

ここで **cyclide** とは G. Darboux (1917) による, 4次実代数曲面:

$$\alpha \left(\sum_{i=1}^3 x_i^2 \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^3 x_i^2 \right) \sum_{i=1}^3 \beta_i x_i + \sum_{i,j=1}^3 \gamma_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^3 \delta_i x_i + \epsilon = 0.$$

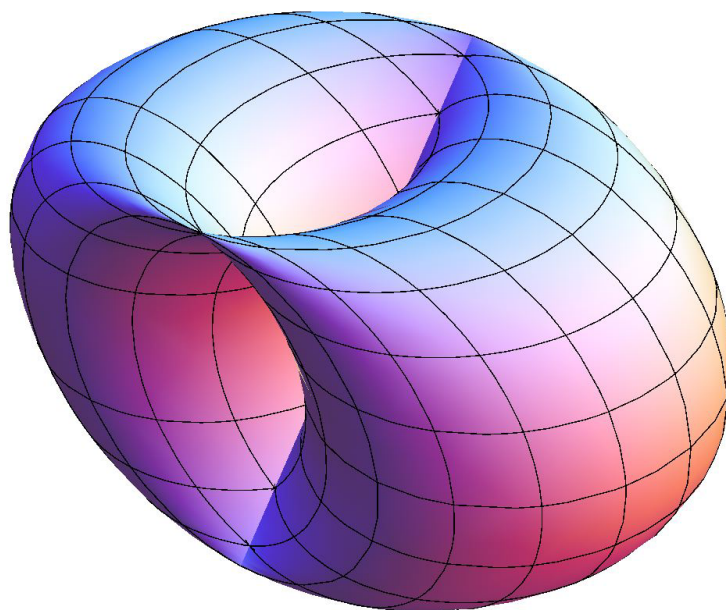
[3] cyclide でない曲面: 2011年10月, ウェブ検索で次のようなプレプリントを発見

A SURFACE CONTAINING A LINE AND A CIRCLE
THROUGH EACH POINT IS A QUADRIC

by FEDOR NILOV AND MIKHAIL SKOPENKOV

多種の円弧の連続族, 線分の連続族を含む曲面を研究 (in arXiv:110.2338v1).

この中で Pottmann らは cyclide でない, 2種の円の連続族を含む曲面を発見



$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 - 4y^2z^2 - 4x^2 = 0,$$

$y = \text{定数}$, または $z = \text{定数}$. による切り口は円. 実際上の式は次と同値:

$$x = \pm\sqrt{1 - y^2} \pm \sqrt{1 - z^2}.$$

さらに彼らは同じ論文で次の結果を得た：

定理. 3次元空間内の閉曲面 S は球面かトーラスに同相とする。もし各点に対してその点を通り S に含まれる **4つの連続的な円の族** が存在するならば S は **cyclide**.

証明) { 竹内の基本群と交差数との関係に関するアイデア }
+ { cyclides に関する古典的定理 }

同時に彼らは次の予想を与えている：

3つの異なる連続的な円の族を含む曲面 \implies cyclides

我々は無限小解析と微分方程式のみを使ってこの問題を解析することにより種数による制限などを排除したい（上の反例は閉曲面でもない）。

無限小解析による曲面の特徴付け

曲面 S に 1 つの円 C が含まれる条件を無限小解析の立場から考えてみる.

- 円上の一点を平行移動により原点
- 3次元空間の適当な回転により S の原点での接平面は $z = ax + by$ とできる ($|a|, |b|$ は十分小)

- 従って曲面の方程式を $z = f(x, y)$ とかけ, 4階微分可能なら, f は

$$ax + by + c_0x^2 + c_1xy + c_2y^2 + \sum_{i=0}^3 d_i x^{3-i} y^i + \sum_{i=0}^4 e_i x^{4-i} y^i + o((x^2 + y^2)^2)$$

のように $x = y = 0$ の近くで4次式の精度で近似できる

なぜ4階微分なのか

- 円や直線の主要な幾何学的性質は2階までの微分で決まる（例，接線の傾き，曲率半径）。
- しかし円と放物線を区別するには少なくとも4階微分までのデータが必要。

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2} = \pm\left(1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)\right).$$

- 実際，4次の精度まで考慮することにより曲面 S の中に含まれ，与えられた点を通る円の数（球面のような特別な場合を除き）有限個（10個）に制限される。

特別な場合を除き，とは

$$ax+by+c_0x^2+c_1xy+c_2y^2+\sum_{i=0}^3 d_ix^{3-i}y^i+\sum_{i=0}^4 e_ix^{4-i}y^i+o((x^2+y^2)^2)$$

の2次式の部分

$$c_0x^2+c_1xy+c_2y^2$$

が球面のものとは異なる \iff 「原点が S の臍点ではない」

例えば z -軸を保つ xy -平面内の適当な回転によりいつでも $c_1 = 0$ とできる事に注意。そうするとこの条件は

$$c_0 \neq c_2.$$

S と平面 H との交わり

円 C を含む平面を H とし, 定数 t, s を用いて

$$H = \{y = tx + sz\}$$

のようにおく. (H が $z = 0$ や $x = 0$ なる場合はこれでは書けないがこのような場合は $s = \infty$ または $t = \infty$ と考える.)

$1 - bs \neq 0$ とすると $(0, 0, 0)$ の付近では $S = \{z = f(x, y)\}$ に対して

$$S \cap H = \{(x, y(x), z(x)); x \in (-\varepsilon, \varepsilon)\}$$

と表され $y(x), z(x)$ は

$$z(x) = A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 + o(x^4),$$

$$y(x) = (t + sA_1)x + sA_2x^2 + sA_3x^3 + sA_4x^4 + o(x^4),$$

$$\begin{aligned}
A_1 &:= \frac{a + bt}{1 - bs}, & A_2 &:= \frac{1}{1 - bs} (c_0 + c_1 A_1 + c_2 A_1^2), \\
A_3 &:= \frac{1}{1 - bs} (c_1 s A_2 + d_0 + (2c_2 s A_2 + d_1) A_1 + d_2 A_1^2 + d_3 A_1^3), \\
A_4 &:= \frac{1}{1 - bs} (c_1 s A_3 + c_2 s^2 A_2^2 + d_1 s A_2 + e_0 + (2c_2 s A_3 \\
&\quad + 2d_2 s A_2 + e_1) A_1^2 + (3d_3 s A_2 + e_2) A_1^3 + e_3 A_1^3 + e_4 A_1^4).
\end{aligned}$$

特に $S \cap H$ が原点の付近で円弧に等しければ A_3, A_4 は A_1, A_2 で決まるので次の方程式が成立:

$$A_3 = \frac{2(1 - bs)(as^2 + ts + bt + a)}{(a^2 + b^2)s^2 + 2(at - b)s + (b^2 + 1)t^2 + 2abt + a^2 + 1} A_2^2, \tag{1}$$

$$A_4 = \frac{(1 - bs)^2 \{(s^2 + t^2 + 1)(1 - bs)^2 + 5(as^2 + ts + bt + a)^2\}}{\{(a^2 + b^2)s^2 + 2(at - b)s + (b^2 + 1)t^2 + 2abt + a^2 + 1\}^2} A_2^3. \tag{2}$$

逆に a, b, c_j, d_j, e_j が (1), (2) を満たせば, $S \cap H$ は原点において x について 4 次のオーダーまでである円弧に等しい.

T の導入: 方程式 (1), (2) を $T := t + sA_1 = (t + as)/(1 - bs)$ を使って表現すると $Z(T) = 0$. (T とは $(S \cap H)$ の原点での接線 $\subset \{y = Tx\}$)

定義 (基本多項式 $Z(T)$). $z = f(x, y)$ を $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ の近傍で定義された C^4 -級関数. f の (x, y) における 4 階までの高階微分を次のようにおく:

$$\left\{ \begin{array}{l} a := f_x(x, y), \quad b := f_y(x, y), \\ c_0 := f_{xx}(x, y)/2, \quad c_1 := f_{xy}(x, y), \quad c_2 := f_{yy}(x, y)/2, \\ d_0 := f_{xxx}(x, y)/3!, \quad d_1 := f_{xxy}(x, y)/2!, \\ d_2 := f_{xyy}(x, y)/2!, \quad d_3 := f_{yyy}(x, y)/3!, \\ e_0 := f_{xxxx}(x, y)/4!, \quad e_1 := f_{xxxxy}(x, y)/3!, \quad e_2 := f_{xxyyy}(x, y)/2!^2, \\ e_3 := f_{xyyyy}(x, y)/3!, \quad e_4 := f_{yyyyy}(x, y)/4!. \end{array} \right.$$

さらにこれらの多項式を係数とする T についてのいくつかの多項式を導入 :

$$C(T) = c_0 + c_1T + c_2T^2, \quad D(T) = d_0 + d_1T + d_2T^2 + d_3T^3,$$

$$E(T) = e_0 + e_1T + e_2T^2 + e_3T^3 + e_4T^4,$$

$$R(T) = (b^2 + 1)T^2 + 2abT + a^2 + 1,$$

$$S(T) = D(T)R(T) - 2(bT + a)C(T)^2,$$

$$K(T) = R'(T)C(T) - R(T)C'(T), \quad W(T) = bS(T) + C(T)K(T),$$

ここで $C'(T) = \partial_T C(T)$, $R'(T) = \partial_T R(T)$, ... など. このとき $Z(T)$ は

$$\mathbf{Z}(T) \equiv Z(T; x, y) :=$$

$$\begin{aligned} & K(T)^2 \left(R(T)E(T) - C(T)^3 \right) + R(T)K(T)D(T) \left(D'(T)R(T) \right. \\ & \quad \left. - 3(b^2 + 1)TD(T) \right) + D(T)^2 R(T) \left[-ab \left(2K(T) + TK'(T) \right) \right. \\ & \quad \left. - 2(a^2 + 1)(b^2 + 1)C(T) + \left((a^2 + 1)c_2 + (b^2 + 1)c_0 \right) R(T) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2R(T)C(T)[(bT + a)\{D(T)K'(T)C(T) + D(T)K(T)C'(T) \\
& - D'(T)K(T)C(T)\} - bD(T)C(T)K(T)] \\
& + 4C(T)^4(bT + a) \times \left\{ (a^2 - 1)c_2 + (b^2 + 1)c_0 \right\} (bT + a) \\
& - \frac{1}{2}ac_1R'(T) + 2a(c_2 - c_0) - bc_1 \}.
\end{aligned}$$

$Z(T)$ は t, s を含まない, T に関する次数が 1 0 の多項式でその係数は f の 4 階までの微分の多項式!

定理 1. $z = f(x, y)$ を原点の近くで定義された C^4 -級関数で次を満たすと
する:

$$f(0, 0) = 0, f_x(0, 0) = 0, f_y(0, 0) = 0, f_{xy}(0, 0) = 0. \quad (3)$$

ここで原点は $S := \{z = f(x, y)\}$ の臍点ではない, 即ち

$$c_2(0, 0) - c_0(0, 0) = \frac{1}{2}(f_{yy}(0, 0) - f_{xx}(0, 0)) \neq 0.$$

このとき次の (i), (ii), (iii) が成立 :

(i) $t_0, s_0 \in \mathbb{R}$ に対して

$$S \cap \{y = t_0x + s_0z\} \quad (4)$$

が原点の近くで円弧または線分であるならば,

$$Z(t_0; 0, 0) = 0.$$

さらにもし円弧ならば $C(t_0; 0, 0) \neq 0$ であり, $t_0 \neq 0$ の下では

$$s_0 = \frac{(t_0^2 + 1)D(t_0; 0, 0)}{2(c_0(0, 0) - c_2(0, 0))t_0C(t_0; 0, 0)}.$$

またもし線分ならば $C(t_0; 0, 0) = D(t_0; 0, 0) = E(t_0; 0, 0) = 0$.

(ii) (円弧の連続族を含む場合) $t(x, y), s(x, y)$ は $(0, 0)$ の近くで定義された実数値連続関数であり, (x_0, y_0) が $(0, 0)$ の近くを動くとき, 集合

$$S \cap \{y - y_0 = t(x_0, y_0)(x - x_0) + s(x_0, y_0)(z - f(x_0, y_0))\} \quad (5)$$

が円弧に一致し, さらに $t(0, 0) \neq 0, Z'(t(0, 0); 0, 0) \neq 0$ と仮定する. このとき連続関数

$$T(x, y) := \frac{t(x, y) + f_x(x, y)s(x, y)}{1 - f_y(x, y)s(x, y)} \quad (6)$$

は $(0, 0)$ の近くで次を満たす:

$$Z(T(x, y); x, y) = 0. \quad (7)$$

さらに $t(x, y), s(x, y)$ が各円弧 (5) 上で一定ならば f はある U_{δ_0} 上で C^5 -級関数となり, 特に $T(x, y)$ は原点の近傍で C^1 -級関数となつて次の方程式を満たす:

$$(\partial_x + T(x, y)\partial_y)T(x, y) = \frac{2S(T)}{K(T)}. \quad (8)$$

さらに $s(x, y), t(x, y)$ もまた C^1 -級関数となって次の方程式を満たす：

$$s(x, y) = \frac{S(T)}{W(T)}, \quad t(x, y) = \frac{TK(T)C(T) - aS(T)}{W(T)}. \quad (9)$$

(iii) 逆に $f(x, y) \in C^5(U_{\delta_0})$ であって、ある $(0, 0)$ の近傍で定義された実数値 C^1 -級関数 $T(x, y)$ が存在して $T(0, 0) \neq 0$ と方程式 (7), (8) を満たすとする。このとき (9) で定義される $t(x, y), s(x, y)$ は十分小さな $\delta > 0$ に対して $C^1(U_\delta)$ に属し次を満たす：任意の $(x_0, y_0) \in U_\delta$ に対して集合

$$S \cap \{y - y_0 = t(x_0, y_0)(x - x_0) + s(x_0, y_0)(z - f(x_0, y_0))\}$$

は $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ のある近傍で円弧に一致する。また $t(x, y), s(x, y)$ はその円弧上一定である。

$f(0,0) = 0, f_x(0,0) = 0, f_y(0,0) = 0, f_{xy}(0,0) = 0$ のとき次を原点における**特性多項式**と定義する：

$$\begin{aligned}
 P(t) &:= Z(t; 0, 0)/(c_0(0, 0) - c_2(0, 0)) = \\
 &- d_0^2 + \left(-4c_0^3(c_0 - c_2) - 6d_0^2 + d_1^2 + 2d_0d_2 + 4(c_0 - c_2)e_0 \right) t^2 \\
 &+ \left(-8d_0d_1 + 4d_1d_2 + 4d_0d_3 + 4(c_0 - c_2)e_1 \right) t^3 \\
 &+ \left(-12c_0^2(c_0 - c_2)c_2 - 5d_0^2 - 2d_1^2 - 4d_0d_2 + 3d_2^2 + 6d_1d_3 \right. \\
 &\left. + 4(c_0 - c_2)e_0 + 4(c_0 - c_2)e_2 \right) t^4 \\
 &+ \left(-8d_0d_1 + 8d_2d_3 + 4(c_0 - c_2)e_1 + 4(c_0 - c_2)e_3 \right) t^5 \\
 &+ \left(-12c_0(c_0 - c_2)c_2^2 - 3d_1^2 - 6d_0d_2 + 2d_2^2 + 4d_1d_3 + 5d_3^2 \right. \\
 &\left. + 4(c_0 - c_2)e_2 + 4(c_0 - c_2)e_4 \right) t^6 \\
 &+ \left(-4d_1d_2 - 4d_0d_3 + 8d_2d_3 + 4(c_0 - c_2)e_3 \right) t^7 \\
 &+ \left(-4(c_0 - c_2)c_2^3 - d_2^2 - 2d_1d_3 + 6d_3^2 + 4(c_0 - c_2)e_4 \right) t^8 + d_3^2 t^{10}.
 \end{aligned}$$

命題. 10 次の t の実多項式 $P(t) = a_{10}t^{10} + a_9t^9 + \cdots + a_1t + a_0$ がある C^4 -級曲面の特性多項式である必要十分条件は以下である：

$$\begin{cases} a_1 = a_9 = 0, a_5 = a_3 + a_7, \\ a_0 \leq 0, a_{10} \geq 0, \\ a_0 - a_2 + a_4 - a_6 + a_8 - a_{10} > 0. \end{cases} \quad (10)$$

さらにもし $a_3 = a_7 = 0$ (例えば 一般の cyclide の任意の点での特性多項式) なら $\#\{t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \mid P(t) = 0\} \leq 6$.

従って非臍点においては $Z(t; 0, 0) = 0$ をみたす t の数は 10 以下である. 実際 $Z(t; 0, 0)$ は $Z(\sqrt{-1}; 0, 0) = 4(c_0 - c_2)^4|_{x=y=0} \neq 0$ をみたすので恒等的にはゼロではない.

定理 2. $S \subset \mathbb{R}^3$ を \mathbb{R}^3 の原点における C^4 -級曲面の芽とする. 原点は S の臍点ではないと仮定する. そのとき S に含まれ, 原点を通る円弧, または線分の総数は高々 **10**. より正確に述べると $U_\delta := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x^2 + y^2 + z^2 < \delta^2\}$,

$\mathcal{C} := \{C; C \text{ はある } \delta > 0 \text{ に対して次を満たす } \mathbb{R}^3 \text{ 内の円, または直線 :}$
 $(0, 0, 0) \in C \cap U_\delta \subset S\}$,

とおくと $\#\mathcal{C} \leq 10$.

注意. この個数評価は S の大域的構造によらない. 例えば閉曲面であること, 種数などによらない. さらに **10** は無限小解析上ベスト評価である. 実際

$$\begin{aligned}
f(x, y) = & \left(\frac{101^2 \cdot 232747}{8 \cdot 609019} \right)^{1/4} x^2 + 48 \sqrt{\frac{166}{609019}} x^3 + y^3 \\
& + \frac{2 \cdot 64481286507 x^4 - 120(610396479 + 160\sqrt{101097154}) x^3 y}{200\sqrt{101}(465494)^{1/4}(609019)^{3/4}} \\
& + \frac{-10259598010 x^2 y^2 + 30(610396479 + 640\sqrt{101097154}) x y^3}{200\sqrt{101}(465494)^{1/4}(609019)^{3/4}} \\
& - \frac{4546921219 y^4}{200\sqrt{101}(465494)^{1/4}(609019)^{3/4}}
\end{aligned}$$

とおくと原点における曲面 $z = f(x, y)$ の特性多項式 $P(t)$ は 10 個のゼロでない実ゼロ点

$t = -10, -2, 1/10, 1, 2, 3, 4, -0.0519793, 0.13882, 1.81316,$
を持つ。すなわち 10 個の異なる \mathbb{R}^3 の原点を通る円 C_1, \dots, C_{10} が存在し各 C_j 上, $z - f(x, y) = o((x^2 + y^2)^2)$ $x, y \rightarrow 0$ が成立。

例. Blum's 6-circle cyclide (ただし前述のものと y, z の役割を入れ替え):

$$M : (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2(a_1x^2 + a_2z^2) + 2a_3y^2 + \ell^2 = 0.$$

ただし $a_1 > a_2 > \ell > 0, a_3 > \ell$. そのとき $\left(0, 0, \sqrt{a_2 \pm \sqrt{a_2^2 - \ell^2}}\right)$ における $P(t)$ は $4(c_0 - c_2)t^2Q(t)$ の形であり ここで

$$Q(t) = \{(a_2 + a_3)t^2 - (a_1 - a_2)\}\{(a_3 + \ell)t^2 - (a_1 - \ell)\}\{(a_3 - \ell)t^2 - (a_1 + \ell)\}.$$

よって $P(t) = 0$ は 6 個のゼロでない以下の解をもつ:

$$t = \pm\sqrt{\frac{a_1 - a_2}{a_2 + a_3}}, \quad \pm\sqrt{\frac{a_1 - \ell}{a_3 + \ell}}, \quad \pm\sqrt{\frac{a_1 + \ell}{a_3 - \ell}}.$$

特に通常のトーラスでは

$$a_1 = a_2 = R^2 + r^2 > a_3 = \ell = R^2 - r^2,$$

なので

$$P(t) = -32R^4(R^2 - r^2)(c_0 - c_2)t^4 \left(t^2 - \frac{r^2}{R^2 - r^2} \right).$$

特に Villarceau の2種の円はゼロでない解 $t = \pm r/\sqrt{R^2 - r^2}$ に対応し通常の2種の円は $t = 0, \infty$ に対応する.

5 階偏微分方程式 (定理 3)

定理 1 の (8) で得られた方程式

$$(\partial_x + T(x, y)\partial_y)T(x, y) = \frac{2S(T)}{K(T)}$$

は 1 階 PDE に見えるが $f(x, y)$ について見れば 5 階の PDE :

$$\sum_{j=0}^5 \binom{5}{j} T^j \partial_x^{5-j} \partial_y^j f(x, y) = \frac{24N(T)}{R(T)K(T)^3}. \quad (11)$$

実際 T は $Z(T) = 0$ を通じて $\nabla f, \nabla^2 f, \nabla^3 f, \nabla^4 f$ の関数とみなせるのでこれは f についての 5 階準線形偏微分方程式.

ここで陰関数定理により $N(T)$ は次のような T の 14 次多項式 :

$$\begin{aligned}
N(T) = & \\
& - 5R(T)K(T)^2E'(T) \left[R(T)D(T) - 2(bT + a)C(T)^2 \right] \\
& + D(T)^3R(T)B_1(T) + 2D(T)^2D'(T)R(T)^2B_2(T) \\
& - D(T)^2R(T)^2K(T) \left[(3d_3T + d_2)(5R(T) - (b^2 + 1)T^2) \right. \\
& \left. + (d_1T + 3d_0)(b^2 + 1) \right] + D(T)^2B_3(T) \\
& + 2(bT + a)D(T)D'(T)R(T)C(T)B_4(T) \\
& + 10(bT + a)D(T)D''(T)R(T)^2K(T)C(T)^2 + D(T)B_5(T) \\
& - 4(bT + a)D'(T)R(T)K(T)C(T)^3 \left[5(bT + a)C'(T) + 2bC(T) \right] \\
& + 4(bT + a)C(T)^4K(T) \left[3d_0B_6(T) + d_1B_7(T) + d_2B_8(T) \right. \\
& \left. - 3d_3TB_9(T) \right] + 4C(T)^4B_{10}(T).
\end{aligned}$$

さらにここで $B_1(T), \dots, B_{10}(T)$ は次で与えられる T, a, b, c_* に関する多項式：

$$\begin{aligned}
 B_1(T) := & K(T) \{ 42(b^2 + 1)R(T) - 20(a^2 + b^2 + 1) \} \\
 & - 4c_2R(T) \{ 3abR(T) - 2(a^2 + b^2 + 1 - a^2b^2)T + 2ab(a^2 + 1) \} \\
 & + 2(b^2 + 1)c_1R(T) \{ 3R(T) + 4abT + 4a^2 + 4 \} \\
 & - 4(b^2 + 1)R(T)R'(T)c_0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_2(T) := & - (4(b^2 + 1)T + 5ab)K(T) - ((b^2 + 1)T^2 + a^2 + 1)K'(T) \\
 & + 4(a^2 + 1)(b^2 + 1)C(T) - 2((a^2 + 1)c_2 + (b^2 + 1)c_0)R(T),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_3(T) := & K(T)^2 \{ -4aR(T)C'(T) + 12(b^2 + 1)(bT + a)TC(T) \\
 & + 8ab(bT + a)C(T) + 12bR(T)C(T) + 2bR(T)(2c_0 + c_1T) \} \\
 & + K(T)K'(T) \{ 4abT(bT + a)C(T) - 12(bT + a)R(T)C(T) \\
 & + bTR(T)(2c_0 + c_1T) + aTR(T)C'(T) \}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + K(T) \left\{ -4a(b^2 + 6)R(T)C(T)^2 - (18(b^2 + 1)T(bT + a) \right. \\
& + 16ab(bT + a) - 4b(a^2 + 1))R(T)C(T)C'(T) \\
& + 8(a^2 + 1)(b^2 + 1)(bT + a)C(T)^2 - 8(bT + a)((a^2 + 1)c_2 \\
& + (b^2 + 1)c_0)R(T)C(T) + 4abT(bc_1 - 2ac_2)R(T)C(T) \\
& + 4a(b^2 + 1)(2c_0 + c_1T)R(T)C(T) - 2ac_2(2c_0 + c_1T)R(T)^2 \\
& - 2bc_0C'(T)R(T)^2 - 12(b^2 + 1)(bT + a)TR'(T)C(T)^2 \\
& - 8ab(bT + a)R'(T)C(T)^2 - 4(bT + a)R(T)R'(T)C(T)C'(T) \\
& + 4bR(T)R'(T)C(T)^2 - 4(bT + a)R(T)^2C'(T)^2 \\
& \left. - 8c_2(bT + a)R(T)^2C(T) + 4bR(T)^2C(T)C'(T) \right\} \\
& - 2(bT + a)K'(T)C(T) \left\{ 2abTR'(T)C(T) + 5R'(T)R(T)C(T) \right. \\
& \left. + 6R(T)^2C'(T) \right\} - 4(bT + a)K''(T)R(T)C(T)^2(R(T) + abT) \\
& - 8(a^2 + 1)(b^2 + 1)(bT + a)R'(T)C(T)^3 + 8(bT + a)((a^2 + 1)c_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (b^2 + 1)c_0)R(T)R'(T)C(T)^2 \\
& - 8(a^2 + 1)(b^2 + 1)(bT + a)R(T)C(T)^2C'(T), \\
B_4(T) & := 2(3(b^2 + 1)T + 5ab)K(T)C(T) + 5R(T)K(T)C'(T) \\
& + 2((b^2 + 1)T^2 + a^2 + 1)K'(T)C(T) - 8(a^2 + 1)(b^2 + 1)C(T)^2 \\
& + 4R(T)C(T)((a^2 + 1)c_2 + (b^2 + 1)c_0), \\
B_5(T) & := 9C(T)^2K(T)^3 + K(T)^2C(T)^2\{6R'(T)C(T) + 4R(T)C'(T) \\
& + 8b(bT + a)C(T) - 8(bT + a)^2C'(T)\} \\
& - 8(bT + a)^2K(T)K'(T)C(T)^3 + K(T)C(T)^2\{-8(bT + a)(bc_1 \\
& - 2ac_2)R(T)C(T) - 8b(bT + a)R(T)C'(T)C(T) + 8b^2R(T)C(T)^2 \\
& - 4b(bT + a)R(T)C(T)C'(T) - 48(bT + a)^2C(T)((a^2 - 1)c_2 \\
& + (b^2 + 1)c_0) + 24ac_1(bT + a)R'(T)C(T) - 48(bT + a)C(T)(2a(c_2 \\
& - c_0) - bc_1) + 12(bT + a)^2R(T)C'(T)^2 - 8b(bT + a)R'(T)C(T)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 8(bT + a)^2 R'(T)C(T)C'(T) + 16c_2(bT + a)^2 R(T)C(T) \\
& - 8b(bT + a)R(T)C(T)C'(T) \} \\
& + 8(bT + a)^2 K'(T)C(T)^3 \{ R'(T)C(T) + 3R(T)C'(T) \} \\
& + 8(bT + a)^2 R(T)C(T)^4 K''(T) \\
& - 16b(bT + a)R(T)C(T)^4 \left((a^2 - 1)c_2 + (b^2 + 1)c_0 \right) \\
& - 32(bT + a)^2 R(T)C(T)^3 C'(T) \left((a^2 - 1)c_2 + (b^2 + 1)c_0 \right) \\
& + 16a(bT + a)R(T)R'(T)c_1 C(T)^3 C'(T) + 4abR(T)R'(T)c_1 C(T)^4 \\
& + 8a(b^2 + 1)(bT + a)R(T)c_1 C(T)^4 - 8bR(T)C(T)^4 \left(2a(c_2 - c_0) \right. \\
& \left. - bc_1 \right) - 32(bT + a)R(T)C(T)^3 C'(T) \left(2a(c_2 - c_0) - bc_1 \right),
\end{aligned}$$

$$B_6(T) := -(b^2 + 1)(bT + a) + 2a,$$

$$B_7(T) := -(b^2 + 1)T(bT + a) + aR'(T) + 2(aT + b),$$

$$B_8(T) := -(a^2 - 3)(bT + a) + aTR'(T) - 4a - 4(bT + a)R(T),$$

$$B_9(T) := (a^2 - 1)(bT + a) + 2a + 4(bT + a)R(T),$$

$$\begin{aligned}
B_{10}(T) := & K(T)^2 \{ 2bC(T) - 4(bT + a)C'(T) \} \\
& - 2(bT + a)C(T)K(T)K'(T) + K(T) \{ aR'(T)c_1C(T) \\
& - 4(bT + a)C(T) \left((a^2 - 1)c_2 + (b^2 + 1)c_0 \right) - 4a(c_2 - c_0)C(T) \\
& + 2bc_1C(T) - 2a(bT + a)^2c_2(2c_0 + c_1T) - 2b(bT + a)^2c_0C'(T) \\
& + 2ab(bT + a)c_1C(T) + a(bT + a)^2c_1C'(T) \\
& + \frac{1}{2}(bT + a)R'(T)c_1(2c_0 + c_1T) - 2(bT + a)(c_2 - c_0)(2c_0 + c_1T) \\
& + (bT + a)c_1C'(T) \} + 8b(bT + a)^2 \left((a^2 - 1)c_2 + (b^2 + 1)c_0 \right) C(T)^2 \\
& + 16(bT + a)^3 C(T)C'(T) \left((a^2 - 1)c_2 + (b^2 + 1)c_0 \right) \\
& - 8a(bT + a)^2 R'(T)c_1C(T)C'(T) - 2ab(bT + a)R'(T)c_1C(T)^2 \\
& - 4a(b^2 + 1)(bT + a)^2c_1C(T)^2 + 4b(bT + a)C(T)^2 \left(2a(c_2 - c_0) \right. \\
& \left. - bc_1 \right) + 16(bT + a)^2 C(T)C'(T) \left(2a(c_2 - c_0) - bc_1 \right).
\end{aligned}$$

ℓ 個の円の連続族を含む曲面

今 $S = \{z = f(x, y)\}$ を C^5 -クラス, $P(t)$ を原点に於ける特性多項式:

ゼロでない ℓ 個の実数 $\{t_k\}_{k=1}^{\ell}$ が存在して各 $k = 1, \dots, \ell$ に対して $P(t_k) = 0$, $P'(t_k) \neq 0$ を満たし, S は $\{t_k\}_{k=1}^{\ell}$ に付随した ℓ 個の円弧の連続な族を含む.

このとき $T_k(x, y)$ を各 t_k に付随した円弧の族に対応する T とおく. すなわち $T_k(0, 0) = t_k$ ($k = 1, \dots, \ell$). このとき f は次の方程式系の解である:

$$\left\{ \begin{array}{l} Z(T_k(x, y)) = 0, \quad T_k(0, 0) = t_k, \\ \sum_{j=0}^5 \binom{5}{j} T_k(x, y)^j \partial_x^{5-j} \partial_y^j f(x, y) = \frac{24N(T_k(x, y))}{R(T_k(x, y))K(T_k(x, y))^3}, \\ (1 \leq k \leq \ell) \end{array} \right. \quad (12)$$

特に $l \geq 2$ ならばこの方程式系は f に対する解析的楕円型方程式系である。実際 k -番目の方程式は次の主表象をもつ 5 階解析的準線形作用素：

$$(\xi + T_k(x, y)\eta)^5,$$

ここで ξ, η は ∂_x, ∂_y に対応した表象である。

定理 4 (2つの円の連続族を含む曲面) . $S : z = f(x, y)$ を (3) を満たす原点の近傍における C^6 -級の曲面片とする。原点は S の臍点ではないと仮定し $P(t)$ を原点における特性多項式とする。今 S は定理 1 の (ii) の意味で $P(t) = 0$ のゼロでない相異なる 2 つの実単純根 t_1, t_2 にそれぞれ対応した円弧の連続族 2 つを含むと仮定する。このとき f は原点で解析的となり、原点での 8 階までの微分係数で決定される。さらに詳しく、 f はこれらの微分係数で定義される 21 個の実パラメーターのみで決定される。

T の計算例. M を 6 円をもつ Blum cyclide とし, $\sigma_1, \sigma_2 = \pm 1$ と
 として $(0, 0, \sigma_2 \sqrt{c + \sigma_1 \sqrt{c^2 - d^2}})$ で考える. $P(t) = 0$ の 6 つのゼロでない実根は

$$\pm \sqrt{\frac{a-c}{c-b}}, \quad \pm \sqrt{\frac{a-d}{d-b}}, \quad \pm \sqrt{\frac{a+d}{-b-d}}.$$

(i) 特性根 $\pm \sqrt{(a-c)/(c-b)}$ のとき, $v_1 = \sqrt{(a-c)(c-b)(c^2-d^2)}$
 とおくと

$$t_{1,\pm}(x, y) = T_{1,\pm}(x, y), \quad s_{1,\pm}(x, y) = 0,$$

また

$$T_{1,\pm}(x, y) := \frac{-2(a-c)(c-b)xy \mp v_1 \sqrt{c^2 - d^2} + 2(a-c)x^2 + 2(b-c)y^2}{(b-c)(c^2 - d^2 + 2(a-c)x^2)}.$$

(ii) 特性根 $\pm\sqrt{(a-d)/(d-b)}$ のとき, $v_2 = \sqrt{2(a-d)(d-b)(c-d)}$ とおいて,

$$t_{2,\pm}(x, y) := \left\{ 2(b-c)(a-d)xyz \mp \sigma_1\sigma_2v_2(-by^2 - cz^2 + (x^2 + y^2 + z^2)(y^2 + z^2)) \right\} / \left\{ (d-b)z((d-c)(d + x^2 + y^2 + z^2) - 2(a-c)x^2) \mp \sigma_1\sigma_2v_2xy(x^2 + y^2 + z^2 - b) \right\},$$

$$s_{2,\pm}(x, y) := \left\{ (c-d)y((b-d)(d + x^2 + y^2 + z^2) + 2(a-b)x^2) \pm \sigma_1\sigma_2v_2xz(x^2 + y^2 + z^2 - c) \right\} / \left\{ (d-b)z((d-c)(d + x^2 + y^2 + z^2) - 2(a-c)x^2) \mp \sigma_1\sigma_2v_2xy(x^2 + y^2 + z^2 - b) \right\}.$$

さらに $T_{2,\pm}(x, y) = P_{2,\pm}(x, y)/Q_2(x, y)$ でありここで

$$P_{2,\pm}(x, y) := xy \left\{ -(c^2 - d^2)(3ab - 2ac - 2bc - (a + b - 4c)d - d^2) \right.$$

$$\begin{aligned}
& + 2(a - c) \left(-2ab + ac + 2bc + (a - 3c)d + d^2 \right) x^2 \\
& + 2(b - c) \left(-2ab + 2ac + bc + (b - 3c)d + d^2 \right) y^2 \\
& + \sigma_1 \sqrt{c^2 - d^2 + 2(a - c)x^2 + 2(b - c)y^2} \left(2c^2(a + b) - 3abc \right. \\
& + (ab + ac + bc - 4c^2)d \\
& \left. - (a + b - c)d^2 + d^3 + 2(a - c)(b - d)x^2 + 2(b - c)(a - d)y^2 \right) \Big\} \\
& \pm \sigma_1 v_2 \sqrt{c - x^2 - y^2 + \sigma_1 \sqrt{c^2 - d^2 + 2(a - c)x^2 + 2(b - c)y^2}} \\
& \times \left\{ \sigma_1 \sqrt{c^2 - d^2 + 2(a - c)x^2 + 2(b - c)y^2} \left(c^2 - d^2 + (a - c)x^2 \right. \right. \\
& \left. \left. + (b - c)y^2 \right) + c \left(c^2 - d^2 + 2(a - c)x^2 + 2(b - c)y^2 \right) \right\}, \\
Q_2(x, y) & := -(b - d)(c - d)^2(2c + d)(c + d) \\
& + (b - d)(d - c) \left(6ac - 7c^2 + 4(a - c)d + d^2 \right) x^2 \\
& - (b - c)(b - d)(c - d)(3c + d)y^2 - 2(a - c)(b - d)(2a - 3c + d)x^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2(b-c) \left(-2ab + ac + 2bc + (a-3c)d + d^2 \right) x^2 y^2 \\
& - \sigma_1 \sqrt{c^2 - d^2 + 2(a-c)x^2 + 2(b-c)y^2} \\
& \times \left\{ (b-d)(c-d)(2c-d)(c+d) \right. \\
& + (b-d) \left(4ac - 5c^2 - 2(a-c)d + d^2 \right) x^2 + (b-c)(b-d)(c-d)y^2 \\
& \left. - 2(a-c)(b-d)x^4 - 2(b-c)(a-d)x^2 y^2 \right\}.
\end{aligned}$$

(iii) 特性根 $\pm \sqrt{(a+d)/(-d-b)}$ に対しては $v_3 = \sqrt{2(a+d)(-b-d)}$ とおいて (ii) と同様の表現を得る. ((ii) の d を $-d$ で置き換える).

5 階常微分方程式系への帰着

2つの円の連続族を含む曲面 S の場合, 1つの円の連続族を S の構成的表示に使い, もう1つの円の連続族を, S が満たすべき偏微分方程式として使うことにより, 偏微分方程式系と同値な5階常微分方程式系を導くことができる。

補題 (円のパラメータ表示) . $x_0, y_0, z_0, U_1, U_2, U_3, V_1, V_2, V_3, \lambda$ を $U_3V_1 - U_1V_3 \neq 0$ をみたす実数. パラメータ $t \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ とする:

$$\begin{aligned}x &= x_0 + \frac{2\lambda(U_1 + V_1t)}{(U_1 + V_1t)^2 + (U_2 + V_2t)^2 + (U_3 + V_3t)^2}, \\y &= y_0 + \frac{2\lambda(U_2 + V_2t)}{(U_1 + V_1t)^2 + (U_2 + V_2t)^2 + (U_3 + V_3t)^2}, \\z &= z_0 + \frac{2\lambda(U_3 + V_3t)}{(U_1 + V_1t)^2 + (U_2 + V_2t)^2 + (U_3 + V_3t)^2}.\end{aligned}$$

これは平面

$$y - y_0 = \frac{U_3V_2 - U_2V_3}{U_3V_1 - U_1V_3} (x - x_0) + \frac{U_2V_1 - U_1V_2}{U_3V_1 - U_1V_3} (z - z_0)$$

に含まれる円であり，中心

$$x_C = x_0 + \frac{\lambda(U_1(V_2^2 + V_3^2) - V_1(U_2V_2 + U_3V_3))}{(U_2V_3 - U_3V_2)^2 + (U_3V_1 - U_1V_3)^2 + (U_1V_2 - U_2V_1)^2},$$

$$y_C = y_0 + \frac{\lambda(U_2(V_3^2 + V_1^2) - V_2(U_3V_3 + U_1V_1))}{(U_2V_3 - U_3V_2)^2 + (U_3V_1 - U_1V_3)^2 + (U_1V_2 - U_2V_1)^2},$$

$$z_C = z_0 + \frac{\lambda(U_3(V_1^2 + V_2^2) - V_3(U_1V_1 + U_2V_2))}{(U_2V_3 - U_3V_2)^2 + (U_3V_1 - U_1V_3)^2 + (U_1V_2 - U_2V_1)^2},$$

半径は

$$R = \frac{|\lambda|\sqrt{V_1^2 + V_2^2 + V_3^2}}{\sqrt{(U_2V_3 - U_3V_2)^2 + (U_3V_1 - U_1V_3)^2 + (U_1V_2 - U_2V_1)^2}}.$$

この補題において, $t = 1/v, x_0 = 0, y_0 = u, z_0 = z_0(u), \lambda = 1,$
 $V_1 = 1, V_2 = j(u) + k(u)V(u), V_3 = V(u),$
 $U_1 = 0, U_2 = k(u)U(u), \quad U_3 = U(u).$

とおくことにより S を次のように表示できる :

$$x = \frac{2v}{1 + \left(k(u)U(u)v + j(u) + k(u)V(u)\right)^2 + \left(U(u)v + V(u)\right)^2},$$

$$y = \frac{2\left(k(u)U(u)v + j(u) + k(u)V(u)\right)v}{1 + \left(k(u)U(u)v + j(u) + k(u)V(u)\right)^2 + \left(U(u)v + V(u)\right)^2} + u,$$

$$z = \frac{2\left(U(u)v + V(u)\right)v}{1 + \left(k(u)U(u)v + j(u) + k(u)V(u)\right)^2 + \left(U(u)v + V(u)\right)^2} + z_0(u)$$

ここで v は各円周方向のパラメータ, u は円の族を表すパラメータで

$$z_0(u), j(u), k(u), U(u), V(u)$$

は u の 5 つの未知解析関数. 実際,

$$S \cap \{x = 0\} = \{(0, u, z_0(u)); u \in \mathbb{R}\},$$

$$y(u, v) - u = j(u)x(u, v) + k(u)(z(u, v) - z_0(u)),$$

なので, 円周を含む平面の法線は $(j(u), -1, k(u))$ であり, 円周の中心 $(x_C(u, v), y_C(u, v), z_C(u, v))$ は次を満たす:

$$(x_C, y_C - u, z_C - z_0(u)) = \frac{1}{U(u)} \vec{e}_1(u) + \frac{V(u)}{U(u)} \vec{e}_2(u)$$

ただし

$$\begin{aligned}\vec{e}_1(u) &= \left(\frac{-j(u)k(u)}{1 + j(u)^2 + k(u)^2}, \frac{k(u)}{1 + j(u)^2 + k(u)^2}, \frac{1 + j(u)^2}{1 + j(u)^2 + k(u)^2} \right), \\ \vec{e}_2(u) &= \left(\frac{-(1 + k(u)^2)}{1 + j(u)^2 + k(u)^2}, \frac{-j(u)}{1 + j(u)^2 + k(u)^2}, \frac{j(u)k(u)}{1 + j(u)^2 + k(u)^2} \right).\end{aligned}$$

$$\vec{e}_1(u) \times \vec{e}_2(u) = (j(u), -1, k(u)) / (j(u)^2 + k(u)^2 + 1)$$

なので $\vec{e}_1(u), \vec{e}_2(u)$ は

$$H := \{(x, y, z); y = j(u)x + k(u)z\}.$$

の基底であり、円の連続族で張られる曲面 S に対して上のパラメータ表示を成り立たせる $z_0(u), j(u), k(u), U(u), V(u)$ をうまく選ぶことができる。

S の $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ 表示から u, v を x, y の代わりに独立変数とみなすことができる。実際,

$$\partial_x = m_1 \partial_u + m_2 \partial_v, \quad \partial_y = m_3 \partial_u + m_4 \partial_v,$$

とかけ, m_1, m_2, m_3, m_4 は次で与えられる u, v の関数である:

$$\begin{aligned} m_1(u, v) &:= \frac{y_v}{x_u y_v - x_v y_u}, \\ m_2(u, v) &:= -\frac{y_u}{x_u y_v - x_v y_u}, \\ m_3(u, v) &:= -\frac{x_v}{x_u y_v - x_v y_u}, \\ m_4(u, v) &:= \frac{x_u}{x_u y_v - x_v y_u}. \end{aligned}$$

これを使って2つ目の円の連続族に対応した偏微分方程式を u, v の5階偏微分方程式に書き直せば $z_0(u), j(u), k(u), U(u), V(u)$ に対するパラメータ v を含む5階常微分方程式が得られる。

定理5. 定理4と同様の条件下で S に対応する $z_0(u), j(u), k(u), U(u), V(u)$ に対し有限個の30変数の実多項式系

$$P_\ell\left(z_0^{(i_1)}(u), j^{(i_2)}(u), k^{(i_3)}(u), U^{(i_4)}(u), V^{(i_5)}(u); i_1, \dots, i_5 = 0, 1, \dots, 5\right)$$

$(\ell = 1, \dots, L)$ が存在し定理4の偏微分方程式系は $U(0) \neq 0$ の下で次の常微分方程式系と同値である。

$$\begin{cases} z_0(0) = z_0'(0) = V(0) = V'(0) - t_1 z_0''(0) = 0, j(0) = t_1, \\ P_\ell\left(z_0^{(i_1)}(u), j^{(i_2)}(u), k^{(i_3)}(u), U^{(i_4)}(u), V^{(i_5)}(u)\right) = 0 \quad (\ell = 1, \dots, L). \end{cases}$$

定理 5 の証明概要

$z_0(u), j(u), k(u), U(u), V(u)$ を用いて 2 番めの円の族に対応した偏微分方程式系を書き直す：

$$\left\{ \begin{array}{l} Z(T_2) = 0, \\ 24N(T_2) - R(T_2)K(T_2)^3 \sum_{j=0}^5 \binom{5}{j} (\partial_x^{5-j} \partial_y^j f) T_2^j = 0, \\ T_2(0, 0) = t_2, \quad j(0) = t_1, \\ z_0(0) = z_0'(0) = V(0) = V'(0) - t_1 z_0''(0) = 0, \end{array} \right.$$

ここで $x = x(u, v), y = y(u, v), f(x, y) = z(u, v)$. 今これらを常微分方程式と見る代わりに T_2 に対する代数方程式系と見直すことにする。ただし係数は実数ではなく、ある抽象的な体 $\mathcal{K}(v)$ ($\mathcal{K}(v)$ は v については有理関数であるような関数の作る体。)

この見方では最初の2つは T_2 のそれぞれ 10次, 14次の代数方程式であり

$$X(T) := 24N(T) - R(T)K(T)^3 \sum_{j=0}^5 \binom{5}{j} (\partial_x^{5-j} \partial_y^j f) T^j$$

とおくと $Z(T_1) = X(T_1) = 0$, ここで

$$T_1 = \frac{j(u) + k(u)f_x}{1 - k(u)f_y} \in \mathcal{K}(v).$$

これは曲面 $S : z = f(x, y)$ が第一の円の連続族を含むことによる。

よって上の連立方程式は結局 $Z(T), X(T) \in \mathcal{K}(v)[T]$ が T_1 以外の共通因子をもつという, 代数的な条件に帰着する。この共通因子の次数は最高9次から最低1次まで9つの場合に分かれる。各場合の条件はユークリッドの互除法などにより結局係数に対する代数的な条件に帰着し, それは

$$z_0(u), j(u), k(u), U(u), V(u)$$

に対する 5 階常微分方程式の有限系になる。9つの場合はそれぞれ同時に含む円の連続族の数に関係することに注意。

実際 cyclide は複素空間では常に 10 個の円の族を含んでいる。

今後の課題

1. 9つの場合分けに応じて 2 種の円弧の連続族を含む曲面を記述する 5 階常微分方程式系を求め、それによって多重な円の族を含む曲面をすべて決定する。
2. 建築構造物などへの応用. Circular Arc Structure (Pottmann, H, L. Shi, and M. Skopenkov, Darboux cyclides and webs from circles), 3D アニメーションへの応用. (?)

付録. 代数曲面になること (Josef Schicho)

2001年の論文 The Multiple Conical Surfaces によると円の連続族を2重に含む曲面は代数曲面。

3次元空間内の円を6個の実パラメーターの組 $\vec{u} := (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6)$ で表す。実際,

$$\begin{cases} (x - u_1)^2 + (y - u_2)^2 + (z - u_3)^2 = u_4^2, \\ z - u_3 = u_5(x - u_1) + u_6(y - u_2). \end{cases}$$

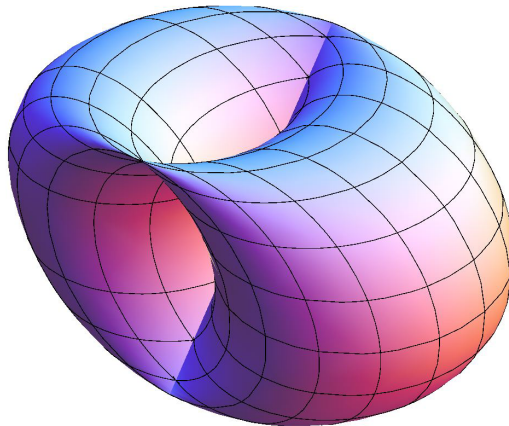
で対応させる。そのとき, 2つの円 \vec{u}, \vec{v} が3次元空間で共有点をもつ条件は次の連立方程式が実数解 (x, y, z) をもつこと。

$$\begin{cases} (x - u_1)^2 + (y - u_2)^2 + (z - u_3)^2 = u_4^2, \\ (x - v_1)^2 + (y - v_2)^2 + (z - v_3)^2 = v_4^2, \\ z - u_3 = u_5(x - u_1) + u_6(y - u_2), \\ z - v_3 = v_5(x - v_1) + v_6(y - v_2). \end{cases}$$

1式マイナス2式と3, 4式を考えると3元連立1次方程式系となり x, y, z が \vec{u}, \vec{v} の有理式で表せる。これを第一の式に代入したものが共有点をもつための条件は $u_1, \dots, u_6, v_1, \dots, v_6$ の非常に長い多項式 $P(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

他方, 3次元空間内の円の連続族は6次元空間内の曲線 $\vec{u}(t)$ ($t \in (a, b)$) のようにかける。3次元空間内の曲面 S が2つの円の連続族を含んでいるとするとこのような6次元空間内の曲線が2つ $\vec{u}(t), \vec{v}(t')$ 存在する。各 t' に対して $\vec{u}(t)$ に対応する円と $\vec{v}(t')$ に対応する円は共有点をもつから

$$P(\vec{u}(t), \vec{v}(t')) = 0$$



従って

$$\{\vec{u}(t) \in \mathbb{R}^6; t \in (a, b)\} \subset \bigcap_{t'} \{\vec{u} \in \mathbb{R}^6; P(\vec{u}, \vec{v}(t')) = 0\}.$$

ここで位相的考察から包含関係は実は局所的に等式。また右辺は多項式環の有限生成性により実は有限個の共通部分になってしまい \mathbb{R}^6 内の代数的な 1 次元曲線であることがわかる。

文献

1. Villarceau, Y., Théorème sur le tore, *Nouvelles Annales de Mathématiques Série 1*, **7** (1848), 345-347.
2. Blum, R., Circles on surfaces in the Euclidean 3-space, *Lecture Note in Math.* **792** (1980), Springer, 213-221.
3. Darboux G., Principes de Géométrie Analytique, *Gauthier-Villars*, Paris, 1917.
4. Takeuchi, N., A closed surface of genus one in E^3 cannot contain seven circles through each point, *Proc. AMS.* **100** (1987), 145-147.

5. Kataoka, K and N. Takeuchi, A system of fifth-order non-linear partial differential equations and a surface which contains many circles, *RIMS Kokyuroku Kyoto University* **1723** (2011), RIMS Joint Research “Introduction to Path Integrals and Microlocal Analysis 2010” organized by Naoto Kumanogo, 142-149.
6. K-T, A system of fifth-order partial differential equations describing a surface which contains many circles, *Bulletin des Sciences Mathématiques* 137(2013), 325-360.
7. K-T, On a system of fifth-order partial differential equations describing surfaces containing two families of circular arcs, *Complex Variables and Elliptic Equations*, 2013, 1-13.

8. K-T, The non-integrability of some system of fifth-order partial differential equations describing surfaces containing 6 families of circles, *RIMS Kokyuroku Bessatsu*, B40(2013), 095-117.
9. K-T, A system of fifth-order PDE's describing surfaces containing 2 families of circular arcs and the reduction to a system of fifth-order ODE's, 京都大学数理解析研究所講究録「超局所解析と漸近解析の最近の進展」(研究代表者: 岡田 靖則 (千葉大 理))に掲載予定, UTMS 2012-10 (Preprint series of Graduate School of Mathematical Sciences, the University of Tokyo).
10. Pottmann, H, L. Shi, and M. Skopenkov, Darboux cyclides and webs from circles, *Computer Aided Geometric Design* **29**(1) (January 2012), 77-97.

ご清聴ありがとうございました。