超局所解析と代数解析を巡って

片岡　清臣

２０１７年３月２１日，於：東京大学大学院数理科学研究科

- 佐藤超関数基礎理論の初等化

- 超関数の境界値理論の簡明化，超局所化

- 佐藤超関数解に対する超局所エネルギー法

- 導来圏，層の超局所台理論による初期値・境界値混合問題の超局所解析

- 非線形問題への代数解析的立場からの１つの挑戦

基本的アイデアを中心に解説する.

佐藤超関数基礎理論の初等化

1958年： 佐藤幹夫によって解析関数を使う新しい超関数の定義.

(Theory of Hyperfunctions, I (1959: I 変数), II (1960：多変数))

1969年：佐藤幹夫・小松彦三郎，超関数の理論と応用の功績で朝日賞受賞

1969∼1972年：佐藤超関数の特異スペクトラムとマイクロ関数の導入

(1969年に函数解析学国際会議 於：東京)

1973年:Sato-Kawai-Kashiwara, Springer レクチャーノート No. 287
pp. 265—529, Microfunctions and Pseudo-differential Equations

(堅田コンファレンス1971の報告集内の論文で超局所解析の基本論文)

1 変数の佐藤超関数 $f(x)$ は

$$f(x) = F_+(x + i0) - F_-(x - i0)$$

と解析関数 $F_\pm(z)$ を使って書けて直観的にもわかり易い．しかし n 変数佐藤超関数は

$$\mathscr{B}(\mathbb{R}^n) := H^n_{\mathbb{R}^n}(\mathbb{C}^n; \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n})$$

のように解析関数の層 $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n}$ を係数とし，実軸 $\mathbb{R}^n$ に台をもつ相対コホモロジー群の元として定義される．従って，理解するには,

多変数解析関数の基本的性質 ＋ 層係数コホモロジー群の消滅定理

などかなりの予備知識が必要．特に後者が大変.

Martineau 型定義：$f(x)$ が開集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 上の佐藤超関数であるとは形式和表現

$$f(x) = \sum_{j=1}^{N} F_j(x + i\Gamma_j 0).$$

ここで，Γ_j は頂点 0 をもつ $\mathbb{R}^n$ の開凸錐，$F_j(z)$ は無限小楔状領域 $\Omega + i\Gamma_j 0$ で解析的． いつある点 x_0 の付近で 0 であるのか，を形式的等号

$$F(x + i0\Gamma) = F'(x + i0\Gamma') \text{ at } x_0 \Longleftrightarrow \Gamma \cap \Gamma' \neq \emptyset, F(z) = F'(z) \ \text{ in } \{z \in \mathbb{C}^n; |z - x_0| < \exists\varepsilon, \mathrm{Im}\, z \in \Gamma \cap \Gamma'\}$$

だけから有限生成されるもので定める（金子晃「超函数入門〈上〉」1990年）．

この定義と佐藤幹夫によるデルタ関数の曲面波展開公式

$$\delta(x) = \frac{(n-1)!}{(-2\pi i)^n} \int_{\{|\xi|=1\}} \frac{(1 - ix\cdot\xi)^{n-2}\Big(1 - ix\cdot\xi - (|x|^2 - (x\cdot\xi)^2)\Big)}{\Big(x\cdot\xi + i(|x|^2 - (x\cdot\xi)^2) + i0\Big)^n} d\sigma(\xi)$$

だけを使って佐藤超関数，マイクロ関数の局所的性質を示し，局所的演算を定義することができる（金子晃，同上； KK, On the theory of Radon transformation of hyperfunctions, 1981）.

しかし大域的性質，特に層 $\mathscr{B}, \mathscr{C}$ の脆弱性 (flabbiness) の証明や大域的演算，特にパラメーターに関する積分の定義などには解析関数の層 $\mathscr{O}$ のコホモロジー群の大域的消滅定理（Malgrange の消滅定理，Grauert の消滅定理など）がどうしても必要であった．他方，Iagolnitzer らによって 1969 年頃定義され，使われていた FBI 変換 (Fourier-Bros-Iagolnitzer)

$$\mathscr{T} f(u, \xi) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix\cdot\xi - |x-u|^2|\xi|} dx$$

を使えば

$$f(x) \text{ の超局所解析性} \Longleftrightarrow |\mathscr{T} f(u, \xi)| \text{ の } |\xi| \to \infty \text{ での指数減少性}$$

がわかっていたが，さらに反転公式

$$\iint_{\mathbb{R}^n_u\times\mathbb{R}^n_\xi} e^{ix\cdot\xi-|u-x|^2|\xi|}\left(\frac{2|\xi|}{\pi}\right)^{n/2}\mathscr{T}f(u,\xi)dud\xi=(2\pi)^n(1+P(\partial_x))f(x)$$

（$P(\partial_x)$ はある負の階数の定数係数楕円型擬微分作用素）を使って

$$\mathbb{R}^n_u\times\mathbb{R}^n_\xi \text{ におけるうまい1の分解} \Rightarrow \text{ 層 } \mathscr{C} \text{ の脆弱性}$$

が初等的に示せた．また，これと金子（同上の下巻）の関数解析的議論と合わせれば層 $\mathscr{B}$ の脆弱性もいえる．従って逆に Grauert の消滅定理の別証明も得られる（青木-片岡-山崎：超函数・FBI変換・無限階擬微分作用素，2004年）．

多変数函数論のコホモロジー消滅定理に頼らなくてもよくなった！

超関数の境界値理論の簡明化，超局所化

佐藤超関数 $u(x) \in \mathscr{B}(\{x \in \mathbb{R}^n;\ x_1 > 0, |x - x_0| < r\})$ が偏微分方程式

$$P(x, \partial_x)u(x) = 0 \quad \text{in } \{x \in \mathbb{R}^n;\ x_1 > 0, |x - x_0| < r\}$$

の解．ただし，m 階偏微分作用素 $P(x, \partial_x) := \sum_{\alpha \geq 0} a_\alpha(x)\partial_x^\alpha$ の係数 $a_\alpha(x)$ は $\{x \in \mathbb{R}^n; |x - x_0| < r\}$ で解析的，かつ境界 $x_1 = 0$ は P に対して非特性的：

$$a_{m,0,\dots,0}(0, x') \neq 0$$

ならば境界値 $u_j(x') \in \mathscr{B}(\{x' \in \mathbb{R}^{n-1}; |x' - x'_0| < r\})$ $(j = 0, 1, \dots)$ が次の意味で一意的に存在（$\tilde{u}$ も一意的）：

$$\exists \tilde{u}(x) \in \mathscr{B}(\{|x - x_0| < r\}) \text{ s.t. } \operatorname{supp} \tilde{u} \subset \{x_1 \geq 0\},$$

$$\tilde{u}(x) = u(x) \text{ in } \{x_1 > 0\},\ P\tilde{u}(x) = \sum_{j=0}^{m-1} u_j(x')\delta^{(j)}(x_1)$$

（小松-河合，Schapira の境界値理論，1971）．

層 $\mathscr{C}_{M_+|X}$，Mild 性の導入

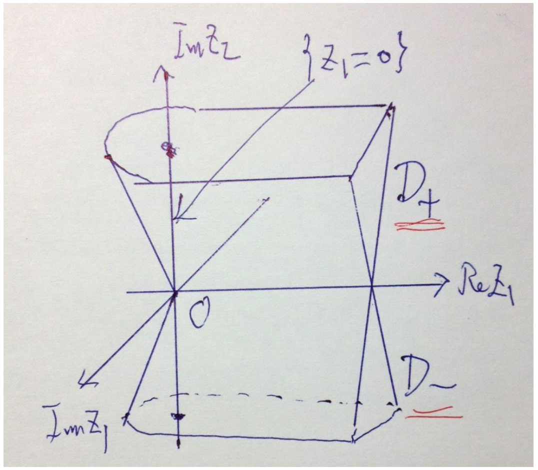
境界値操作は $x_1 \geq 0$ のような閉集合に台が限られた佐藤超関数の超局所解析が本質的であることがわかる．実解析的境界 $N = \{x_1 = 0\} \subset M, X := M^{\mathbb{C}}$ に対し層 $\mathscr{C}_{N|X}$ なるものが既に導入されていたがこれではやや中途半端であった．そこで（KK, 1976）で $M_+ := \{x_1 \geq 0\}$ として層 $\Gamma_{M_+}(\mathscr{B}_M)$ の超局所分解となる層 $\mathscr{C}_{M_+|X}$ を導入．現在では

$$\mathscr{C}_{M_+|X} := \mu hom(\mathbb{Z}_{M_+}; \mathscr{O}_X)[n]$$

と書ける．このような超局所的な層 $\mathscr{C}_{M_+|X}, \mathscr{C}_{N|X}$ を考えることにより，非特性境界の片側での超関数解の超局所的性質がよくわかるようになり解であることと離れて境界値をもつ条件 **Mild** 性なる超局所的条件を得るに至った（KK，Microlocal theory of boundary value problems I，1980）．$x_1 = +0$ 側から Mild 性がある超関数は $n = 2$ とすれば結局次のような境界値表示をもつ：

$$u(x) = U_+(x_1, x_2 + i0) + U_-(x_1, x_2 - i0) \text{ in } x_1 > 0.$$

ここで $U_{\pm}(z_1, z_2)$ は次の $D_{\pm}$ でそれぞれ解析的.



このような領域で解析的な定義函数をもつ超関数は1975年頃の金子晃による一連の論文にあり，mild 性の概念のきっかけとなった．　非特性面の片側での解 $u(x)$ は $x_1 = +0$ 側から境界の各点で mild であることがいえ，その境界値，自然拡張 $\tilde{u}(x)$ は

$$\partial_{x_1}^j u(+0, x_2) := \partial_{z_1}^j U_+(0, x_2 + i0) + \partial_{z_1}^j U_-(0, x_2 - i0),$$

$$\tilde{u}(x) := U_+(x_1, z_2)Y(x_1)|_{\mathrm{Im}\, z_2 = +0} + U_-(x_1, z_2)Y(x_1)|_{\mathrm{Im}\, z_2 = -0}.$$

ここで$Y(x_1)$はHeaviside関数．これにより非特性境界値問題の超局所解析が明快になる．他方で大阿久俊則は境界値をもつ，より弱い条件であるF-mildなる条件を定義し，確定特異点型境界値問題などへ応用した．

応用１．回折現象のモデルに対する擬微分作用素の境界値問題の解の "内部から境界点への" 超局所解析性の伝播定理 (KK, Microlocal theory of boundary value problems II, 1981)．ただし境界条件は仮定しない．

応用２．$x_1 = 0$上で特性根が常に重複する偏微分方程式の超局所解析．

$$\sigma(P)(x, \xi) = \prod_{j=1}^{m} (\xi_1 - x_1^\ell \alpha_j(x, \xi')).$$

のように主要部が綺麗に因数分解される場合．ただし$\ell = 1, 2, \dots$など．通常のやり方はx', ξ'をパラメータとするx_1の常微分方程式とみて解析するが$m \geq 3$であると常微分方程式自体の解析が難しくなって具体的な結論が出せ

ない．それに対してこの問題を $x_1 \geq 0$，$x_1 \leq 0$ の 2 つの境界値問題に分解し，それぞれで特異な座標変換

$$t = \frac{(\pm x_1)^{\ell+1}}{\ell+1}, \quad \pm x_1 = \{(\ell+1)t\}^{1/(\ell+1)}$$

と変換すると $x_1 \geq 0$ での境界値問題

$$x_1^m P(x, \partial_x)\tilde{u}(x) = 0,\ \mathrm{supp}\,\tilde{u} \subset \{\pm x_1 \geq 0\}$$

は $t > 0$ での 2 つの境界値問題

$$Q_\pm(t, x', \partial_t, \partial_{x'})v_\pm(t, x') = 0,\ \mathrm{supp}\,v_\pm \subset \{t \geq 0\}$$

に分解し，それぞれを解析すればよい．ただし $Q_\pm$ は $t^{1/(\ell+1)}$ のような特異掛け算作用素を含むがそのかわり主要部はすっきりした形となり超局所解析はむしろし易い (KK, Microlocal Analysis of Boundary Value Problems with Regular or Fractional Power Singularities, 1995)．山根英司 (1995) はこの方針に基づき $\ell = 1, m = 2, 3$ のときの解析を，千葉康生 (2004) は $\ell = 1$ で一般の m のときの解析を行った．

佐藤超関数解に対する超局所エネルギー法

佐藤超関数 $f(x)$ に対しては一般には $|f(x)|^p$ やその L^p- ノルムは意味をなさない．しかし $p=2$ のとき，$|f(x)|^2$ の代わりに $f(x)\overline{f(u)}$ を (x,u) の超関数と考えて議論．さらに f が実解析パラメーター t をもつ超関数であれば

$$E(x,u) := \int_T f(t,x)\overline{f(t,u)}dt \ \left(= \int_{\mathbb{R}^m} \mathrm{ext}_{\overline{T}}(f(t,x)\overline{f(t,u)})dt\right)$$

のような積分を (x,u) の超関数と考えて微分方程式の解の一意性や正則性の証明に応用(KK, Microlocal energy methods and pseudo-differential operators, 1985).

ただしその議論の特徴は等号による変形ではなく，x,u のエルミート核関数としての半正定値性に基づく不等号 $\ll$ を超局所化した不等号:

$$k_1(x,u) \ll k_2(x,u) \quad \text{at } (\mathring{x},\mathring{x}; i\mathring{\eta}, -i\mathring{\eta})$$

を用いて変形する．さらにこの不等号は応用上使いにくいのでより弱い不等号

$$k_1(x,u) \ll_q k_2(x,u) \quad \text{at } (\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{x}; i\overset{\circ}{\eta}, -i\overset{\circ}{\eta})$$

が導入された．その定義にはある種の，主シンボルが半正定値エルミート関数であるような指数型無限階擬微分作用素 $\exp(P)$ を用いる必要がある．

$\overset{\circ}{p} = (\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{x}; i\overset{\circ}{\xi}, -i\overset{\circ}{\xi}) \in \Delta^a(\sqrt{-1}T^*\mathbb{R}^n)(|\overset{\circ}{\xi}| = 1)$ とすると，

$$k(x,u) \gg_q 0 \quad \text{at } \overset{\circ}{p} \quad (\text{quasi-positive at } \overset{\circ}{p})$$

$$\Longleftrightarrow \exists P \text{ (restricted, positive) s. t.}$$

$$: \exp(P(z,w,\xi,\eta)) : k(x,u) \gg 0 \quad \text{at } \overset{\circ}{p}.$$

ここで P の例として $0 < \sigma < 1$ として，

$$P := \frac{(\xi_1\eta_1)^{1+(\sigma/2)}}{(-i\xi_1)^2 + (i\eta_1)^2} \ \text{at } (0,0; idx_1 - idu_1).$$

このような定義が可能となったのは青木貴史の無限階擬微分作用素の指数解析理論の発達(1982～1984)に大きく依存する．

応用１．熱方程式の境界値問題 (例えば有界領域で実解析的境界をもちDirichlet条件）の佐藤超関数解は境界上を超えて実解析性となる (1988).

応用２． Treves型微分作用素 $\sum_{j=1}^{m} \alpha_j(\partial_{t_j}^2 + t_j^2\partial_x^2) + \gamma\partial_x$ が原点において解析的準楕円型となるための低階項に関する条件の別証明 (1988).

以上の２つの問題では低階項が重要な役割を発揮していて従来の超局所解析の手法では扱うことができなかった.

導来圏，層の超局所台理論による初期値・境界値混合問題の超局所解析

フランスのSjöstrandやLebeauはFBI変換や評価の手法を駆使して回折現象の超局所解析など，境界条件下での境界に沿う正則性伝播定理を得ていた．しかし我々の境界値問題の超局所解析の手法，すなわち個々の解の構成にこだわる手法では境界条件下で境界に沿って正則性が伝播することを示すのが難しかった．他方，極めて抽象的な理論である導来圏と柏原-Schapiraの層の超局所台理論(Microlocal Study of Sheaves, *Astérisques*, **128**,1985)の組み合わせがこのような問題の解決に適していることを発見した．以下はDirichlet条件下での例である：

$P(t,x,\partial_t,\partial_x) = \partial_t^2 + A_1(t,x,\partial_x)\partial_t + A_2(t,x,\partial_x)$：実解析的係数をもつ $M := \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n$ 上の2階偏微分作用素．$N := \{x_1 = 0\}$ は非特性境界．

$u(t,x) \in \mathscr{B}(\{(t,x) \in \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^n_x \mid x_1 > 0\})$ は次の初期値-境界値混合問題を満たす解：

$$\begin{cases} P(t,x,\partial_t,\partial_x)u(t,x) & = f(t,x) \quad (x_1 > 0), \\ \qquad u(t,x)|_{x_1=+0} & = g(t,x'), \\ \qquad \partial_t^j u(0,x) & = h_j(x) \quad (j = 0, 1,\ x_1 > 0). \end{cases} \tag{1}$$

ここで f, g, h_j は与えられた超関数; $x' = (x_2, \ldots, x_n)$, t は時間変数. 適当な関数を u から引き去ることにより次を仮定しても一般性を失わない：

$$g(t,x) = h_0(x) = h_1(x) = 0.$$

$u(t,x)$ の代わりに $u(t,x)Y(\pm t) =: u_\pm(t,x)$ を考えると, $u(0,x) = \partial_t u(0,x) = 0$ なので,

$$P(t,x,\partial_t,\partial_x)u_\pm(t,x) = f(t,x)Y(\pm t).$$

結局 $f_\pm := f(t,x)Y(\pm t)$ とおくと u に対する問題は $u_\pm(t,x)$ に対する次の問題に帰着：

$$\begin{cases} P(t,x,\partial_t,\partial_x)u_\pm(t,x) & = f_\pm(t,x) \quad (x_1>0), \\ \quad u(t,x)|_{x_1=+0} & = 0, \\ \quad \mathrm{supp}\ (u_\pm(t,x)) & \subset \{\pm t \geq 0\}. \end{cases} \tag{2}$$

さらに $\{x_1 = 0\}$ は P に対して非特性面なので自然拡張 $\widetilde{u_\pm}(t,x) = u_\pm(t,x)Y(x_1)$ を考えると次を満たす：

$$\begin{cases} P(t,x,\partial_t,\partial_x)\widetilde{u_\pm}(t,x) = \widetilde{f_\pm}(t,x) + a(t,0,x')\dfrac{\partial u_\pm}{\partial x_1}(t,+0,x')\delta(x_1), \\ \quad \mathrm{supp}\ (\widetilde{u_\pm}(t,x)) \subset \{x_1 \geq 0\} \cap \{\pm t \geq 0\}. \end{cases}$$

ここで $a(t,x)$ は P における ∂_t^2 の係数である．また，$\widetilde{f_\pm}(t,x)$ は $f_\pm(t,x)$ への $x_1 \leq 0$ 自然拡張．ここで第 1 式全体に $x_1\times$ を施すと次を得る：

$$\begin{cases} x_1P(t,x,\partial_t,\partial_x)\widetilde{u_\pm}(t,x) = x_1\widetilde{f_\pm}(t,x), \\ \quad \mathrm{supp}\ (\widetilde{u_\pm}(t,x)) \subset \{x_1 \geq 0\} \cap \{\pm t \geq 0\}. \end{cases} \tag{3}$$

$\widetilde{u_\pm}(t,x), x_1\widetilde{f_\pm}(t,x) \in \Gamma_{\{x_1\geq 0, \pm t\geq 0\}}(\mathscr{B}_{\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}^n_x})$ に注意すると，これは次の層複体の完全性を調べることと同値である：

$$0 \longrightarrow \Gamma_{\{x_1\geq 0, \pm t\geq 0\}}(\mathscr{B}_{\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}^n_x}) \xrightarrow{x_1 P} \Gamma_{\{x_1\geq 0, \pm t\geq 0\}}(\mathscr{B}_{\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}^n_x}) \longrightarrow 0. \tag{4}$$

故に (3) の $(0,0,\mathring{x}')$ における一意可解性は層複体 (4) の $(0,0,\mathring{x}')$ における完全性と同値である．このようにして最初の混合問題は代数的な表現に帰着できた．他方，佐藤超関数の層は脆弱なので，(4) は $\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}^n_x$ 上の層複体 $\mathscr{F}$ ：

$$\mathscr{F} : 0 \longrightarrow \Gamma_{\{x_1\geq 0\}}(\mathscr{B}_{\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}^n_x}) \xrightarrow{x_1 P} \Gamma_{\{x_1\geq 0\}}(\mathscr{B}_{\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}^n_x}) \longrightarrow 0 \tag{5}$$

に 関手 $\mathbb{R}\Gamma_{\{\pm t\geq 0\}}(\cdot)$ を施して得られる；すなわち，$\mathbb{R}\Gamma_{\{\pm t\geq 0\}}(\mathscr{F})$．よってこの完全性は 層複体の導来圏において次のように書ける：

$$\mathbb{R}\Gamma_{\{\pm t\geq 0\}}(\mathscr{F})\Big|_{(0,0,\mathring{x}')} = 0.$$

これはKashiwara-Schapira の定義した層複体のマイクロ台の言葉では

$$(0, 0, \mathring{x}'; \pm dt) \notin \mathrm{SS}(\mathscr{F})$$

と書ける．ここで， $\mathrm{SS}(\mathscr{G})$ (層複体 $\mathscr{G}$ のマイクロ台) とは C^1 級多様体 Z 上の層複体 $\mathscr{G}$ に対して定義される T^*Z の錐状閉集合．特に この議論により，我々は初期面 $\{t = 0\}$ はそれほど重視する必要がないことがわかる．

よって今後は座標を境界面 $t = 0$ に合わせて次のようにとる：

$$M = \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^n_x \supset N = \{(t, x) \in M \mid t = 0\},$$
$$X = \mathbb{C}_{\tilde{t}} \times \mathbb{C}^n_z \supset Y = \{\tilde{t} = 0\} \times \mathbb{C}^n_z.$$

$P(t, x, \partial_t, \partial_x)$ でこの座標での作用素の表示とし，次の左 $\mathscr{D}_X$-加群を考える：

$$\widetilde{\mathscr{M}} := \mathscr{D}_X \Big/ \Big(\mathscr{D}_X\, \tilde{t}\cdot P(\tilde{t}, z, \partial_{\tilde{t}}, \partial_z)\Big).$$

従って,

$$\begin{aligned}\mathscr{F} &= \mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\widetilde{\mathscr{M}}, \Gamma_{\{t\geq 0\}}(\mathscr{B}_M)) \\ &= \mathbb{R}\Gamma_M\left(\mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\widetilde{\mathscr{M}}, \Gamma_{\{t\geq 0\}}(\mathscr{B}\mathscr{O}_{\mathbb{R}_t\times\mathbb{C}^n_z}))\right)[n],\end{aligned}$$

ここで $\mathscr{B}\mathscr{O}_{\mathbb{R}_t\times\mathbb{C}^n_z}$ は z を正則パラメータとする, $t, \mathrm{Re}\, z, \mathrm{Im}\, z$ の超関数の層. 従って $\mathbb{R}_t \times \mathbb{C}^n_z$ 上の層複体 $\mathscr{G}$ を次で定義する：

$$\mathscr{G} := \mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\widetilde{\mathscr{M}}, \Gamma_{\{t\geq 0\}}(\mathscr{B}\mathscr{O}_{\mathbb{R}_t\times\mathbb{C}^n_z})).$$

Kashiwara-Schapira のマイクロ台理論とは $\mathrm{SS}(\mathscr{G})$ の上からの評価から $\mathrm{SS}(\mathbb{R}\Gamma_M(\mathscr{G}))$ の上からの評価を得る定理である. 従ってこの定理をうまく使えば実領域での混合問題の一意可解性を複素領域でのより単純な問題の可解性に帰着させることができる. 今の場合, より単純な問題とは層複体

$$\mathscr{G} : 0 \longrightarrow \Gamma_{\{t\geq 0\}}(\mathscr{B}\mathscr{O}_{\mathbb{R}_t\times\mathbb{C}^n_z}) \xrightarrow{t\cdot P} \Gamma_{\{t\geq 0\}}(\mathscr{B}\mathscr{O}_{\mathbb{R}_t\times\mathbb{C}^n_z}) \longrightarrow 0 \qquad (6)$$

に関するものであるが実はこれは 0 次に集中している層複体である. 実際, $\{t = 0\}$ は $P(t, z, \partial_t, \partial_z)$ に対して非特性的なので, $t \cdot P$ は全射. 故に 次

のような層複体の quasi 同型を得る：

$$\mathscr{G} \simeq \ker(tP) \simeq \mathscr{K},$$

ここで

$$\mathscr{K} := \{U(t,z) \in \mathscr{O}_X|_{[0,+\infty)_t \times \mathbb{C}^n_z} \mid PU = 0, U(0,z) = 0\}, \tag{7}$$

$$\mathscr{K} \ni U(t,z) \longmapsto U(t,z)Y(t) \in \ker(tP). \tag{8}$$

もっともわかりやすい場合として次のような Dirichlet 条件のときを考える：

$$U(0,z) = \partial_{\tilde{t}} U(0,z) = \cdots = \partial_{\tilde{t}}^{k-1} U(0,z) = 0.$$

定理 (KK- N. Tose, On microhyperbolic mixed problems, 1991).
$P(\tilde{t}, z, \partial_{\tilde{t}}, \partial_z) = \partial_{\tilde{t}}^m + A_1(\tilde{t}, z, \partial_z)\partial_{\tilde{t}}^{m-1} + \cdots + A_m(\tilde{t}, z, \partial_z)$: m階 解析的偏微分作用素, , k は次のような整数 : $1 \le k \le m-1$.

$$\widetilde{\mathscr{M}} := \mathscr{D}_X \Big/ \Big(\mathscr{D}_X \, \tilde{t}^{\,m-k} \cdot P(\tilde{t}, z, \partial_{\tilde{t}}, \partial_z)\Big).$$

$\mathring{t} \ge 0$, $\mathring{\zeta} \ne 0$, $p = (\mathring{t}, \mathring{z}; \mathring{\tau} dt + \mathrm{Re}(\mathring{\zeta} dz)) \in T^*(\mathbb{R}_t \times \mathbb{C}_z^n)$ とすると,

$$p \notin \mathrm{SS}(\mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\widetilde{\mathscr{M}}, \Gamma_{\{t \ge 0\}}(\mathscr{B}\mathscr{O}_{\mathbb{R}_t \times \mathbb{C}_z^n})))$$

であるための十分条件は次の (1) または (2) が満たされること :

(1) $\mathring{t} > 0$, and $\sigma(P)(\mathring{t}, \mathring{z}, w + \mathring{\tau}, \mathring{\zeta}) \ne 0 \ (\forall w \in \sqrt{-1}\mathbb{R})$.

(2) $\mathring{t} = 0$, $\sigma(P)(0, \mathring{z}, w + \mathring{\tau}, \mathring{\zeta}) \ne 0 \ (\forall w \in \sqrt{-1}\mathbb{R})$, and

$$k = \#\{w \in \mathbb{C} \mid \sigma(P)(0, \mathring{z}, w + \mathring{\tau}, \mathring{\zeta}) = 0, \ \mathrm{Re}\, w < 0\}.$$

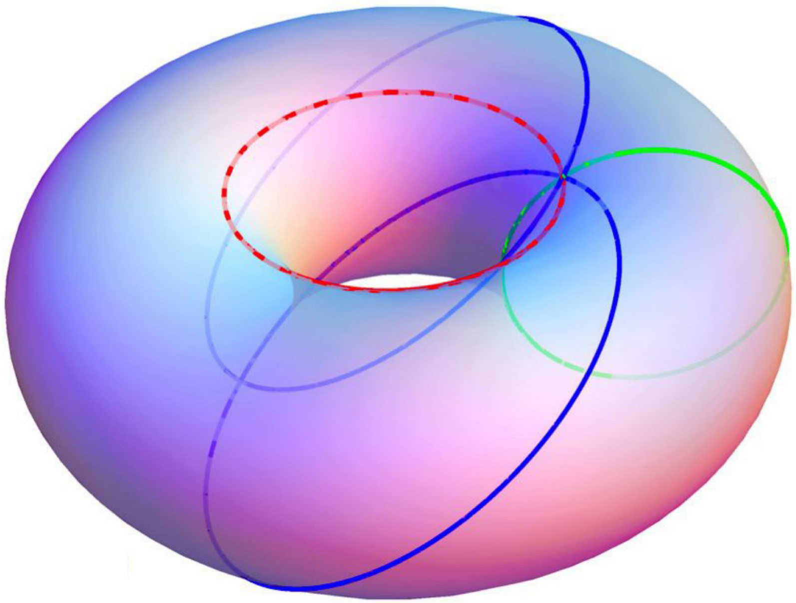
最近の研究 (KK, The functor $\beta_Y(\cdot)$ and mixed problems for $\mathscr{D}_X$-modules, 2016) では 1991 年のときは主方程式が単独偏微分方程式だったのが一般の $\mathscr{D}$-加群の場合まで拡張され，また座標普遍な定式化もなされた．

今後の課題：上記の理論では基本的に偏微分方程式系しか扱えない．擬微分方程式系を扱うには圏の局所化などが必要であるが実質的に層でないものを扱う必要がある．そのためにはマイクロ台の理論自体も Martineau 型の素朴な理論に進化させる必要があると思われる．

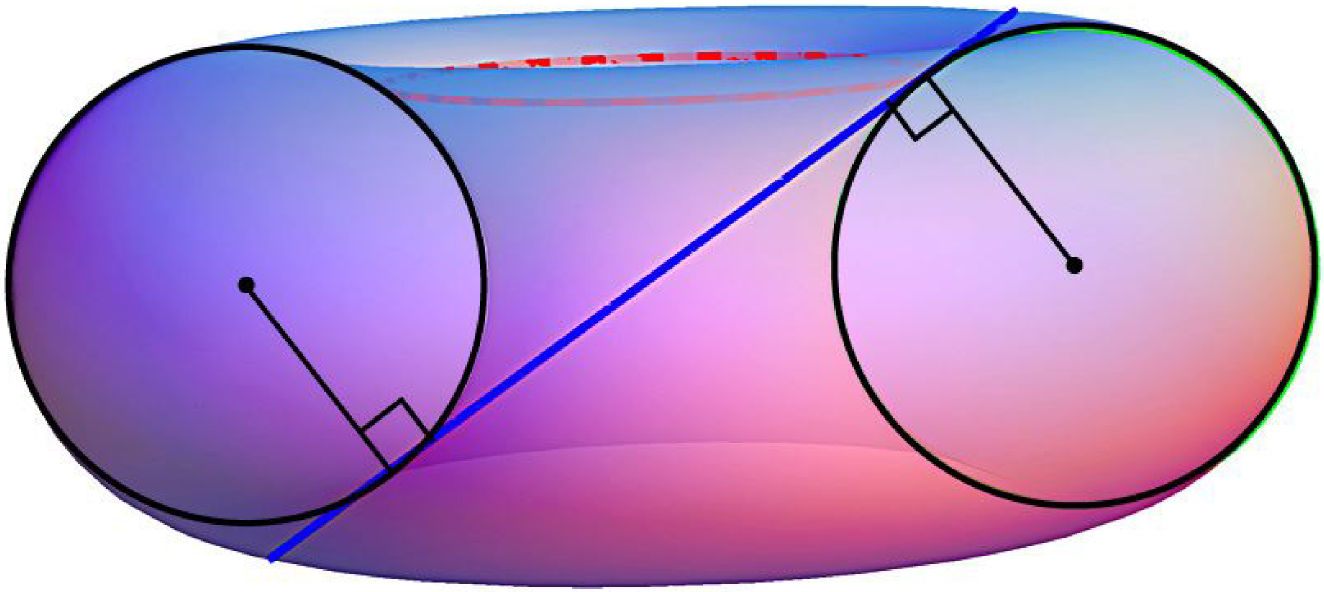
非線形問題への代数解析的立場からの１つの挑戦

幾何に現れる５階非線形偏微分方程式系の例

３次元ユークリッド空間内の曲面で，２種類以上の円の連続族を含むものをすべて求めよ，という問題．トーラスは４種類含む(Yvon Villarceau, 1848)!

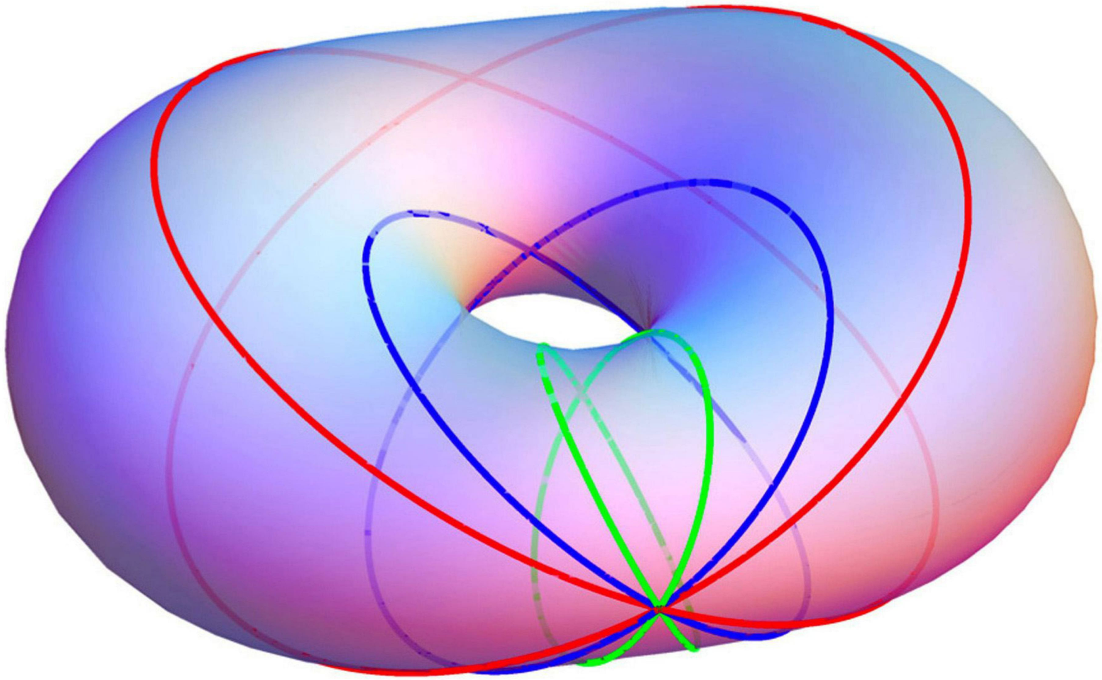


トーラス上の各点をとおる４種類の円の族
（青色の，傾いた円が Villarceau の円）



トーラスの一般化で英国のブラムが1980年に発見したBlum cyclide：

$$S:\ (x^2+y^2+z^2)^2-2ax^2-2by^2-2cz^2+d^2=0.$$



Blum cyclides の1例

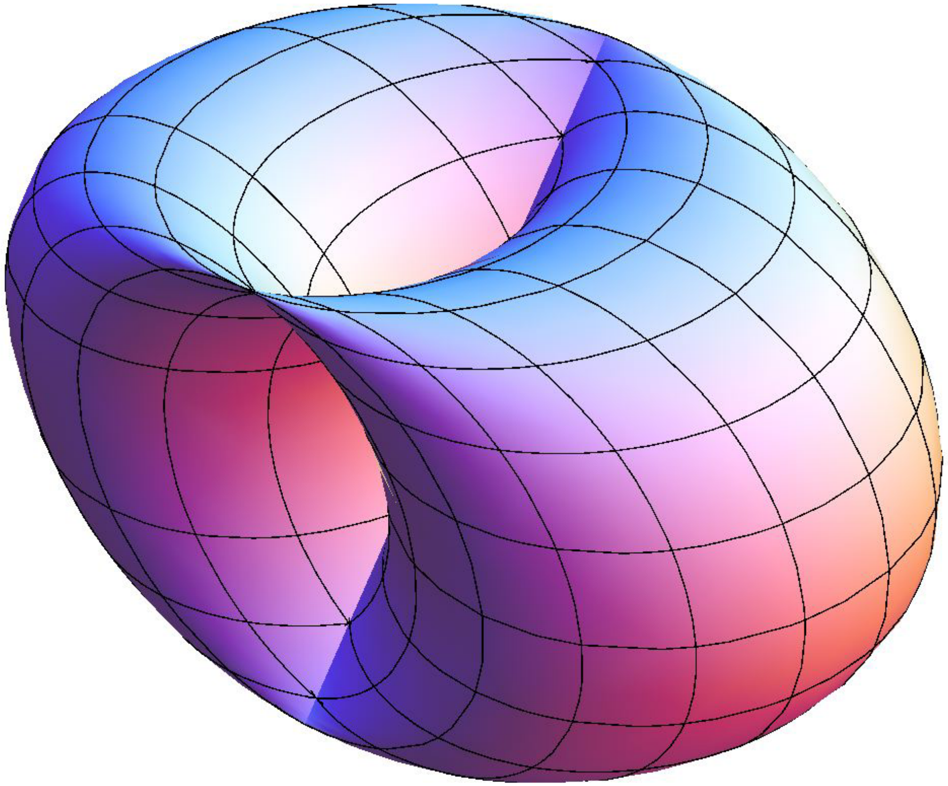
$$(x^2+y^2+z^2)^2-6x^2-4y^2+4z^2+1=0.$$

各点を通る6種類の円の族を含む

2011年ナイロフとスコペンコフにより

$$(x^2+y^2+z^2)^2-4y^2z^2-4x^2=0$$

なる２種の円の連続族を含む非サイクリッド曲面も発見された．



ちなみにブラムサイクリッドでは最高６種の円の連続族を含む．球や平面でないとき最高何種の円の族を含むか，という問題は竹内伸子が修士論文で６である（ただしトーラスのように穴が１つの閉曲面）ことを証明したが最近は無条件で６が上限であることを代数幾何学者が証明した．しかしここでは曲面が円の族を含む，という条件を素朴に微分で表して解析する．

まずC^4-級曲面片$M : z = f(x, y)$上の一点Ｐに対してMがＰ を通る円弧（または線分）を１つ含む条件をＰにおけるfの４階までの偏微分係数によって表す．Mの１点$(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$を通りMに含まれる円Cは実数t, sが存在して

$$C = M \cap \{y - y_0 = t \cdot (x - x_0) + s \cdot (z - f(x_0, y_0))\}.$$

$M = \{(x, y, f(x, y)); x, y \in \mathbb{R}\}$を使って$C$の点の座標を$x - x_0$でテイラー展開する．このとき４次のオーダーまで展開するとCが円弧であれば$3, 4$次の展開係数は$1, 2$次の展開係数で決まる．これは円弧は接線の傾きと半径の

みで決まることからわかる．すると t, s に対し２つの代数方程式が成立することになり，４次までの展開係数を考えることにより (t, s) という対が f の (x_0, y_0) における４階までの偏微分係数に対して有限個しかなさそうな事が予測できる．t, s は着目する点 (x_0, y_0) の関数なので $t(x, y), s(x, y)$ と書くとこの２つの関数が円の族を表す関数になる．$t(x, y), s(x, y)$ は同じ円弧の上では一定になり，円弧の連続族として１つの微分方程式をみたすこともわかる．さらに

$$T(x, y) := \frac{t(x, y) + f_x(x, y)s(x, y)}{1 - f_y(x, y)s(x, y)} \tag{9}$$

を考えると $t(x, y), s(x, y)$ は逆に T で表されてしまうという顕著な性質があり，理論を簡単化できる．$T(x, y)$ は円弧の $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ における接線を xy-平面に射影したとき，$y - y_0 = T(x_0, y_0)(x - x_0)$ となる量．そしてこの $T(x, y)$ がみたす代数方程式が次の基本多項式 $Z(T)$.

基本多項式 $Z(T)$. $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ の近傍で定義された C^4-級関数 $f(x, y)$

の (x,y) におけるテイラー展開係数を次のようにおく.

$$
\begin{aligned}
&a := f_x(x,y),\ b := f_y(x,y),\\
&c_0 := f_{xx}(x,y)/2,\ c_1 := f_{xy}(x,y),\ c_2 := f_{yy}(x,y)/2,\\
&d_0 := f_{xxx}(x,y)/3!,\ d_1 := f_{xxy}(x,y)/2!,\\
&d_2 := f_{xyy}(x,y)/2!,\ d_3 := f_{yyy}(x,y)/3!,\\
&e_0 := f_{xxxx}(x,y)/4!,\ e_1 := f_{xxxy}(x,y)/3!,\ e_2 := f_{xxyy}(x,y)/2!^2,\\
&e_3 := f_{xyyy}(x,y)/3!,\ e_4 := f_{yyyy}(x,y)/4!.
\end{aligned}
$$

さらに変数 T の多項式 $C(T), D(T), E(T), R(T), S(T), K(T), W(T)$ を：

$$
\begin{aligned}
C(T) &:= c_0 + c_1 T + c_2 T^2, \quad D(T) := d_0 + d_1 T + d_2 T^2 + d_3 T^3,\\
E(T) &:= e_0 + e_1 T + e_2 T^2 + e_3 T^3 + e_4 T^4,\\
R(T) &:= (b^2+1)T^2 + 2abT + a^2 + 1,\ \ K(T) := R'(T)C(T) - R(T)C'(T),\\
S(T) &:= D(T)R(T) - 2(bT+a)C(T)^2,\\
W(T) &:= bS(T) + C(T)K(T) = 2TC(T)^2 + (bD(T) - C'(T)C(T))R(T),
\end{aligned}
$$

ここで$C'(T)=\partial_T C(T), R'(T)=\partial_T R(T), ...$など．このとき$Z(T)$は

$$
\begin{aligned}
&Z(T) \equiv Z(T;x,y) := \\
&K(T)^2(R(T)E(T)-C(T)^3)+R(T)K(T)D(T)(D'(T)R(T) \\
&-3(b^2+1)TD(T))+D(T)^2R(T)[-ab(2K(T)+TK'(T)) \\
&-2(a^2+1)(b^2+1)C(T)+((a^2+1)c_2+(b^2+1)c_0)R(T)] \\
&+2R(T)C(T)[(bT+a)\{D(T)K'(T)C(T)+D(T)K(T)C'(T) \\
&-D'(T)K(T)C(T)\}-bD(T)C(T)K(T)] \\
&+4C(T)^4(bT+a)\{((a^2-1)c_2+(b^2+1)c_0)(bT+a) \\
&-\frac{1}{2}ac_1R'(T)+2a(c_2-c_0)-bc_1\}.
\end{aligned}
$$

で定義され，$Z(T)$のTに関する次数は高々10．そのとき$t(0,0)\neq 0$なら(9)で導入した$T(x,y)$は原点の近傍で次をみたす：

$$Z(T(x,y);x,y)=0, \tag{10}$$

$$s(x,y)=\frac{S(T)}{W(T)},\quad t(x,y)=\frac{TK(T)C(T)-aS(T)}{W(T)}. \tag{11}$$

また，$t(x,y),s(x,y)$ は各円弧上一定なので f が U_{δ_0} 上の C^5-級関数，かつ $Z'(t(0,0);0,0)\neq 0$ なら， $T(x,y)$ は次をみたす C^1-級の関数：

$$(\partial_x+T(x,y)\partial_y)T(x,y)=\frac{2S(T)}{K(T)}. \tag{12}$$

(12) は 1 階の偏微分方程式のようにみるが T は $Z(T(x,y);x,y)=0$ をとおして $\nabla f,\nabla^2 f,\nabla^3 f,\nabla^4 f$ の関数と考えられるので，$Z(T)=0$ に陰関数定理を使うと最終的に $f(x,y)$ に対する 5 階の偏微分方程式が得られる：

$$\sum_{j=0}^{5}{}_5C_j\,T^j\partial_x^{5-j}\partial_y^j f(x,y)=\frac{24N(T)}{R(T)K(T)^3}.$$

ここで $N(T)$ は次で定義される T について非常に複雑な14次の多項式：

$$N(T) := -K(T)\left((\partial_x + T\partial_y)Z(T) - \frac{K(T)^2 R(T)}{24}\sum_{j=0}^{5} {}_5C_j T^j \partial_x^{5-j}\,\partial_y^j f\right) - 2S(T)Z'(T).$$

ただし $(\partial_x + T\partial_y)Z(T) := (\partial_x + T\partial_y)Z(T; x, y)$ は $Z(T)$ の各係数だけに関する微分．$N(T)$ の各係数は $f(x,y)$ の4階までの微分 a, b, c_*, d_*, e_* の多項式．これらの準備の下で5階非線形偏微分方程式系は次で与えられる．

定理．(KK - N.Takeuchi, A system of fifth-order partial differential equations describing a surface which contains many circles, 2013)．ある整数 ℓ $(1 \le \ell \le 10)$ に対し $Z(t; 0, 0) = 0$ は ℓ 個のゼロでない実単純根 $\{t_k\}_{k=1}^{\ell}$，を持ち，$M : z = f(x,y)$ は $\{t_k\}_{k=1}^{\ell}$ に付随した ℓ 個の円弧の連続族を含む，と仮定する．$T_k(x,y)$ を t_k に対応する円弧の連続族

に対して導入され，$T_k(0,0) = t_k$ $(k = 1, ..., \ell)$ をみたす関数とする．そのとき f は次の連立偏微分方程式系をみたす：

$$\begin{cases} Z(T_k(x,y)) = 0, \quad T_k(0,0) = t_k, \\ \displaystyle\sum_{j=0}^{5} {}_5C_j\, T_k(x,y)^j \partial_x^{5-j} \partial_y^j f(x,y) = \frac{24N(T_k(x,y))}{R(T_k(x,y))K(T_k(x,y))^3} \quad (1 \le k \le \ell). \end{cases}$$

この方程式系は最高階の部分が $(\partial_x + T_k(x,y)\partial_y)^5$ と同じになり，$(t_k)_{k=1}^{\ell}$ が相異なることから $\ell \ge 2$ であればいわゆる楕円型偏微分方程式系になる．またすべてが多項式や代数関数で定義されていることから解 f が解析関数であることもわかり，原点でのべき級数展開を考えると f は高々21個の実パラメータで決まることがいえる．現在，より詳しい解析をおこなっている．また，$\ell = 2$ の場合は 5 個の 1 変数未知関数に対する常微分方程式系に帰着されることも示した(KK - N. Takeuchi, A system of fifth-order PDE's describing surfaces containing 2 families of circular arcs and the reduction to a system of fifth-order ODE's, 2013).

ご静聴ありがとうございました！