層の複体の入射分解の存在 (version 1.1)

佐藤超関数における微分方程式論では多変数関数論の初歩などで学ぶ層に対する操作より一歩進んだ操作，いわゆる層の間に働く特殊な関手を使う．例えば閉集合 S に台を限る関手 $\varGamma_S$ や，微分方程式系 $\mathfrak{M}$ の超関数解の層を考えるときに現れる層準同型全体の層を作る関手 $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathfrak{M},*)$ であり，これらは本質的な重要性を持つ．その中でも特に重要なのは位相空間 X 上の環の層 $\mathcal{R}$(ただし単位元をもつとする) を作用にもつ（左）$\mathcal{R}$-加群の層 $\mathcal{F},\mathcal{G} \in Sh_{\mathcal{R}}(X)$ に対する $\mathcal{R}$ 層準同型の作る層 $\mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ である．実際 X の閉集合 S に対する $\varGamma_S$ は

$$\varGamma_S\mathcal{F} = \mathcal{H}om_{\mathbb{Z}_X}(\mathbb{Z}_S,\mathcal{F})$$

とも書けてしまう．ここで $\mathbb{Z}_S$ は S 上の定数層を $X \setminus S$ 上での茎を 0 として X 全体に拡張したものである．そしてこの関手 $\mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(*,*)$ に対するコホモロジー理論を展開するのに欠かせないのが $\mathcal{R}$-入射加群層による与えられた層の分解である．通常の層のコホモロジー理論ではこの代わりに soft sheaf や flabby sheaf による分解が使われるがこの 2 つは層の完全列の大域切断をとった時のコホモロジー理論には使えても $\mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(*,*)$ に対するコホモロジー理論には使えない．しかし逆に $\mathcal{R}$-入射加群層は $\mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(*,*)$ のコホモロジー理論に使えるだけでなくそれ自身 flabby sheaf になるので同時に層の大域コホモロジー理論にも使える，という優れた性質を備えている．

ここではその基礎として $\mathcal{R}$-加群の層の複体に対して導来関手の定義やコホモロジー理論に必要な $\mathcal{R}$-入射分解の存在（定理 3.2）と一意性（定理 3.3）を簡単な証明付きで紹介する．

1　$\mathcal{R}$-入射加群層とは

以下では X を位相空間，$\mathcal{R} \in Sh(X)$ を単位元をもつ（一般には非可換）環の層とする．$Sh_{\mathcal{R}}(X)$ を，$\mathcal{R}$ が作用する加群の層全体のカテゴリーとする．例えば $\mathcal{R} = \mathbb{Z}_X, \mathcal{O}_X, \mathcal{D}_X$（それぞれ整数，正則関数，正則微分作用素の層，ただし後者 2 つは X が複素多様体のとき）．

定義 1.1. $\mathcal{I} \in Sh_{\mathcal{R}}(X)$ が $\mathcal{R}$-入射加群 (injective $\mathcal{R}$-module) であるとは $0 \to \mathcal{A} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{B}$ なる $\mathcal{R}$ 完全列を満たす任意の $\mathcal{A},\mathcal{B} \in Sh_{\mathcal{R}}(X)$ と，任意の $\mathcal{R}$-morphism $\mathcal{A} \xrightarrow{h} \mathcal{I}$ に対し，h の拡張 $\widetilde{h}$; すなわち $h = \widetilde{h} \circ \alpha$ をみたす $\mathcal{R}$-morphism $\widetilde{h} : \mathcal{B} \to \mathcal{I}$ が存在する事（もちろん一意とは限らない）．これにより $\mathcal{R}$-完全列 $0 \to \mathcal{A} \xrightarrow{h} \mathcal{B} \xrightarrow{g} \mathcal{C} \to 0$ があれば $\mathcal{R}$-入射加群 $\mathcal{I}$ に対して以下も完全（特に h^* が全射）：

$$0 \to \mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(\mathcal{C},\mathcal{I}) \xrightarrow{g^*} \mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(\mathcal{B},\mathcal{I}) \xrightarrow{h^*} \mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(\mathcal{A},\mathcal{I}) \to 0.$$

命題 1.2. $\mathcal{R}$-入射加群 $\mathcal{I}$ は X 上の *flabby sheaf.*

Proof. X の任意の開集合 U に対し $\mathcal{I}(X) \to \mathcal{I}(U)$ なる制限写像が全射であればよい．$\mathcal{R}_U$ を U への制限では $\mathcal{R}$ に一致し $X \setminus U$ 上の茎はゼロであるような層とすると $\mathcal{R}_U \in Sh_{\mathcal{R}}(X)$. 実際 $\mathcal{R}_U$ の X 上の断面とは台が U に含まれる（U の境界の近傍では恒等的にゼロである）X 上の断面である．$0 \to \mathcal{R}_U \to \mathcal{R}$ は $\mathcal{R}$-完全であり $c \in \mathcal{I}(U)$ を一つとって $c^* : \mathcal{R}_U \to \mathcal{I}$ を $c^*(r) := rc \in \mathcal{I}$ で定義すると X 上の $\mathcal{R}$-層準同型を定める．入射性により c^* の拡張 $\widetilde{c^*} : \mathcal{R} \to \mathcal{I}$ が存在することになるが $\widetilde{c^*}(1_X) \in \mathcal{I}(X)$ が c の X への拡張を与える． □

2 入射加群の存在

まず単位元をもつ（非可換）環 R と R 加群について考える．

定義 2.1. R 加群 I が入射加群 (injective R-module) であるとは
$0 \to A \xrightarrow{\alpha} B$ なる R 完全列を満たす任意の R 加群 A, B と，任意の R-morphism $A \xrightarrow{h} I$ に対し，h の拡張 $\widetilde{h}$; すなわち $h = \widetilde{h} \circ \alpha$ をみたす R-morphism $\widetilde{h} : B \to I$ が存在する事.

命題 2.2. 実は $B = R$ で $A = L \subset R$ のとき，すなわち L が R の（左）イデアルのとき条件が成立すれば十分である．

Proof. $\forall c \in B \setminus A$ に対し h を $A + Rc$ 上に拡張できることを繰り返せば Zorn の補題により B 全体にまで拡張できる．一方 h を $A + Rc$ 上に拡張するには $\widetilde{h}(c) \in I$ を決めればよいが $L = \{r \in R | \, rc \in A\}$ は（左）イデアルであり $r \in L$ に対しては $r\widetilde{h}(c) = \widetilde{h}(rc) = h(rc) \in I$ として定まっている．従って $L \to I$ なる R-morphism の $R \to I$ への拡張性から $\widetilde{h}(c) \in I$ を定める事ができる． □

例 2.3. R が体ならベクトル空間の（一般には無限個の）基底の存在定理により任意の R 加群は入射的．$R = \mathbb{Z}$ のときは I の任意の元 c と $\forall \ell \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ に対し $\ell c' = c$ なる $c' \in I$ が存在する事が入射加群の必要十分条件（上の命題より）．

命題 2.4. R が体 K 上のベクトル空間であるとき，$R' := Hom_K(R, K)$ を考えると作用を $r \cdot h(m) := h(mr)$（または $h(m) \cdot r := h(rm)$）として左（右）R-加群になる．このとき R' は左（右）R-入射加群.

Proof. L を任意の R の左（右：以下は左だけ）イデアルとすれば左 R-準同型 $\varphi : L \to R'$ に対して K-線形写像 $\varphi : R \otimes_R L \to K$ が定義される．$R \otimes_R L \simeq L$ だから K-線形汎関数として φ を R 上に拡張すれば K-線形写像 $\varphi : R \otimes_R R \to K$ が得られ，これは φ の $R \to R'$ なる拡張で左 R-準同型. □

命題 2.5. 任意の R 加群 J に対し，J を含む R 加群 J' が存在し次を満たす：任意の R-イデアル L, 及び $\alpha : L \to R$ R-*morphism* $h : L \to J$ に対し $\widetilde{h} : R \to J'$ なる R-*morphism* $\widetilde{h}$ で $\widetilde{h}|_L = h$ なるものが存在する．

Proof. R の左イデアル全体を $\mathcal{L}$ とし，

$$\mathcal{M} = \{(L,h) | L \in \mathcal{L}, h : L \to J\,(R\text{-morphism})\}$$

とおく．J と $e_{L,h}$ $((L,h) \in \mathcal{M})$ で生成される R 加群

$$\mathcal{J} := J \oplus \left(\oplus_{(L,h)\in\mathcal{M}} R\,e_{L,h}\right)$$

（有限個の成分を除いて 0）を考え，同値関係（$\forall (L,h) \in \mathcal{L}, \forall \ell \in L$）

$$h(\ell) \oplus (-\ell)e_{L,h} \sim 0$$

を入れて J' とすればよい． □

定理 2.6. 任意の R 加群 J に対し，J を含む R 入射加群 I が存在する．

Proof. R の基数 $\sharp R$ を考え，1 から $2^{\sharp R}$ までの整列順序数 κ のうち

$$\sharp\{\kappa' | \kappa' < \kappa\} > \sharp R$$

となるものの中で最小の整列順序数を κ_0 とする．J から始めて超限帰納的に命題 4 の構成を κ_0 まで繰り返す．すなわち各 $\kappa < \kappa_0$ に対して R 加群 J_κ が与えられ $1 \le \kappa < \kappa' < \kappa_0$ ならば $J \subset J_\kappa \subset J_{\kappa'}$, かつ J_κ と $J_{\kappa+1}$ の関係は命題 4 の J と J'．κ に一つ手前がない場合は $J_\kappa = \cup_{\kappa'<\kappa} J_{\kappa'}$ と定義する．このとき $I := \cup_{\kappa<\kappa_0} J_\kappa$ とすればよい．実際任意の左イデアル L, R-morphism $h : L \to I$ が与えられたとき，ある $\kappa < \kappa_0$ が存在して $h(L) \subset J_\kappa$ ならば h の $J_{\kappa+1}$ への拡張 $R \to J_{\kappa+1} (\subset I)$ が作れるので証明終わり．そこでもしこのような κ が存在しないとする．$h(L) \subset I = \cup_{\kappa<\kappa_0} J_\kappa$ なので各 $\ell \in L$ に対し $\kappa(\ell) := \inf\{\kappa |\ h(\ell) \in J_\kappa\}$ とおく．仮定より任意の $\kappa < \kappa_0$ に対し $h(\ell) \notin J_\kappa$ なる $\ell \in L$ が存在するから $\kappa(\ell) > \kappa$. 従って

$$[1, \kappa_0) = \cup_{\ell \in L} [1, \kappa(\ell)).$$

ところが右辺の基数は $\sharp[1,\kappa(\ell)) \le \sharp R$ なので (κ_0 の定義により) 高々$(\sharp R)^2 = \sharp R$ （無限基数として）．これは $\sharp[1,\kappa_0) > \sharp R$ と矛盾． □

注意 2.7. 整列順序数などを使わない証明としては次のものがある．R が体 K 上のベクトル空間であるとき，左 R-加群 M に対して $M' := Hom_K(M,K)$ を考えるとこれは右 R-加群になり（作用は $h(m) \cdot r := h(rm)$, 実際 $(h(m)r_1)r_2 = h(r_1 m)r_2 = h(r_1 r_2 m)$）さらに $M'' := (M')'$ は左 R-加群．$M \ni m \mapsto h(m) \in K$ $(\forall\, h \in Hom_K(M,K))$ により自然な埋め込み $M \to M'' = (Hom_K(M,K))'$ があり，1 対 1 であることも M が K 上のベクトル

空間にもなることから確認できる．例えば任意の元 $m(\neq 0) \in M$ に対し，$h(m) = 1 \in K$ となる K-線形汎関数 $h : M \to K$ が作れるからである．またこの埋込みは R-準同型でもある．他方 $N := \bigoplus_{h \in Hom_K(M,K)} (h) \cdot R$ を $Hom_K(M, K)$ の元 h すべてで生成される自由右 R-加群とし，$N \to Hom_K(M, K)$ を自然な全射右 R-準同型とする．このとき

$$M'' = (Hom_K(M, K))' \to N'$$

は単射な左 R-準同型．上と組み合わせると $M \to N'$ は単射な左 R-準同型で

$$N' = \prod_{h \in Hom_K(M,K)} Hom_K(R, K)$$

は各因子 $Hom_K(R, K)$ が命題2.4より左 R-入射加群なので N' も左 R-入射加群になる．

3 入射加群層・入射分解の存在

定理 3.1. 任意の $\mathcal{R}$ 加群層 $\mathcal{J}$ に対し, $\mathcal{J}$ を部分層として含む $\mathcal{R}$ 入射加群層 $\mathcal{I}$ が存在する．

証明. 層 $\mathcal{J}$ の開集合 U 上の断面 $\mathcal{J}(U)$ は $\Pi_{x \in U} \mathcal{J}_x$ の部分群とみなせる．そこで各 $x \in X$ に対して環 $\mathcal{R}_x$ と $\mathcal{R}_x$-加群 $\mathcal{J}_x$ を考え $\mathcal{J}_x \subset I_x$ なる $\mathcal{R}_x$-入射加群 I_x を一つとる．層 $\mathcal{I}$ を任意の開集合 U に対して

$$\mathcal{I}(U) := \Pi_{x \in U} I_x$$

と定義すればよい．$\mathcal{I}$ は自然に $\mathcal{R}$ 加群層であり $\mathcal{J}$ を部分層として含む．$\mathcal{I}$ が $\mathcal{R}$ 入射加群の層であることは容易にわかる．($\mathcal{A} \to \mathcal{I}$ の拡張 $\mathcal{B} \to \mathcal{I}$ の構成は $\mathcal{R}_x$-morphism $\mathcal{A}_x \to (\mathcal{I}_x \to) I_x$ の $\mathcal{B}_x$ への拡張としてつくればよい．

定理 3.2. $\mathcal{R}$ 加群層の複体 $\mathcal{F} = (\mathcal{F}^j, \partial^j)_{j \in \mathbb{Z}}$ が $\mathcal{F}^j = 0$ $(\forall j < 0)$ をみたすとき $\mathcal{R}$ 入射加群層の複体 $\mathcal{I} = (\mathcal{I}^j, d^j)_{j \in \mathbb{Z}}$ と複体の $\mathcal{R}$-*morphism* $h = (h^j)_{j \in \mathbb{Z}} : \mathcal{F} \to \mathcal{I}$ （$h^{j+1}\partial^j = d^j h^j$ $(\forall j \in \mathbb{Z})$ を満たすもの）で以下を満たすものが存在する：

(1) $\mathcal{I}^j = 0$ $(\forall j < 0)$,

(2) $h^j : \mathcal{F}^j \to \mathcal{I}^j$ は単射 $(\forall j)$,

(3) $h^j : H^j(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} H^j(\mathcal{I})$ $(\forall j)$ （各次数でのコホモロジー群の同型）.

証明. まず $\mathcal{F}^0 \subset \mathcal{I}^0$ なる $\mathcal{R}$ 入射加群層 $\mathcal{I}^0$ を一つとる．h^0 はこの埋め込み $h^0 : \mathcal{F}^0 \to \mathcal{I}^0$. 続いて

$$\mathcal{I}'^1 := (\mathcal{I}^0 \oplus \mathcal{F}^1)/\{(-x, \partial^0(x)) | \, x \in \mathcal{F}^0\}$$

（商層）とおく．直和埋め込みからくる自然な $\mathcal{R}$-morphism $d^0 : \mathcal{I}^0 \to \mathcal{I}'^1, h^1 : \mathcal{F}^1 \to \mathcal{I}'^1$ が決まり $d^0 h^0(x) = h^1 \partial^0(x)$ $(\forall x \in \mathcal{F}^0)$. また明らかに h^1 は単射，$\mathrm{Ker}\, d^0 = \mathrm{Ker}\, \partial^0 = H^0(\mathcal{F})$.

そこで$\mathcal{I}'^1 \subset \mathcal{I}^1$なる$\mathcal{R}$入射加群層$\mathcal{I}^1$を一つ取り入射性により$h^1 : \mathcal{F}^1 \to \mathcal{I}^1$に拡張しておく．以下同様の議論を繰り返せばよい．但し

$$\mathcal{I}'^{k+1} := \left((\mathcal{I}^k / d^{k-1}\mathcal{I}^{k-1}) \oplus \mathcal{F}^{k+1}\right) / \{([-h^k(x)], \partial^k x) |\, x \in \mathcal{F}^k\}.$$

定理 3.3. $\mathcal{F} = (\mathcal{F}^j, \partial^j)_j, \mathcal{G} = (\mathcal{G}^j, \delta^j)_j, \mathcal{I} = (\mathcal{I}^j, d^j)_j \in Sh_{\mathcal{R}}(X)$ は $\mathcal{F}^j, \mathcal{G}^j, \mathcal{I}^j = 0\ \forall j < 0$ とする．$\mathcal{R}$-*morphism* $h : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$，$g : \mathcal{F} \to \mathcal{I}$ に対して h は *quasi-isomorphism*，すなわち $h^j : H^j(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} H^j(\mathcal{G})\ \forall j$ で, 各$\mathcal{I}^j$は$\mathcal{R}-$入射加群の層とする．このとき$\mathcal{R}$-*morphism* $\widetilde{g} : \mathcal{G} \to \mathcal{I}$ が存在して$\widetilde{g} \cdot h - g$ は 0-*homotopic;* すなわち $\mathcal{R}$-*morphism* $k^j : \mathcal{F}^j \to \mathcal{I}^{j-1}$ が存在して

$$\widetilde{g}^j \cdot h^j - g^j = d^{j-1}k^j + k^{j+1}\partial^j.$$

証明. $j' \leq j$ なるすべての j' に対して$\widetilde{g}^{j'}, k^{j'+1}$が構成され上と以下を満たすとする：

$$d^{j'}\widetilde{g}^{j'} = \widetilde{g}^{j'+1}\partial^{j'}.$$

そのとき$\widetilde{g}^{j+1}, k^{j+2}$ を同様の２つの条件をみたすように構成する．実際h^{j+1}はコホモロジーの同型を誘導するので

$$\mathrm{Ker}\,\delta^{j+1} = \mathrm{Im}\,\delta^j + h^{j+1}(\mathrm{Ker}\,\partial^{j+1})\,(\subset \mathcal{G}^{j+1}).$$

そこで $\widetilde{g}^{j+1} : \mathrm{Ker}\,\delta^{j+1} \to \mathcal{I}^{j+1}$ を $\mathrm{Ker}\,\delta^{j+1} \ni c = \delta^j(\alpha_j) + h^{j+1}(\beta_{j+1})$ として (ただし $\alpha_j \in \mathcal{G}^j, \beta_{j+1} \in \mathrm{Ker}\,\partial^{j+1}$)

$$\widetilde{g}^{j+1}(c) := d^j\widetilde{g}^j(\alpha_j) + (g^{j+1} + d^jk^{j+1})(\beta_{j+1}).$$

これがwell-defであることはやや大変であるがhがquasi-isoであることからチェックできる．あとは$\mathcal{I}^{j+1}$の入射性を使って$\widetilde{g}^{j+1}$ を

$$\widetilde{g}^{j+1} : \mathcal{G}^{j+1} \to \mathcal{I}^{j+1}$$

に拡張すればよい．また$\widetilde{g}^{j+1}$の定義により

$$\epsilon^{j+1} := \widetilde{g}^{j+1} \cdot h^{j+1} - g^{j+1} - d^jk^{j+1} : \mathcal{F}^{j+1} \to \mathcal{I}^{j+1}$$

は$\mathrm{Ker}\,\partial^{j+1}$上0. よって$[\epsilon^{j+1}] : \mathcal{F}^{j+1}/\mathrm{Ker}\,\partial^{j+1} \to \mathcal{I}^{j+1}$を誘導するが$0 \to \mathcal{F}^{j+1}/\mathrm{Ker}\,\partial^{j+1} \xrightarrow{\partial^{j+1}} \mathcal{F}^{j+2}$ (exact) なので$\mathcal{I}^{j+1}$の入射性により$[\epsilon^{j+1}] : \mathcal{F}^{j+2} \to \mathcal{I}^{j+1}$に拡張される．すなわち$k^{j+2} : \mathcal{F}^{j+2} \to \mathcal{I}^{j+1}$が存在して$\epsilon^{j+1} = k^{j+2}\partial^{j+1}$.