

# 関数論による翼の揚力の解析（今井功理論の紹介）

(Introduction to Complex Analysis of airfoil  
and lift power by Isao Imai)

片岡 清臣 東京大学大学院数理科学研究科

Recent Topics in Algebraic Analysis

（代数解析千葉研究集会）

令和4年2月22日，千葉大学

# 内容

- 1 飛行機の揚力とベルヌーイの定理（翼断面と空気循環）
- 2 渦なしの場合の大気の流体力学
- 3 長い翼の周りの渦なし定常流（2次元流体力学への帰着：流速/音速比小でさらに関数論にほぼ帰着）
- 4 複素速度ポテンシャルと2次元翼断面に働く力（Blasiusの第一公式）
- 5 平面翼，平底円弧翼，円弧翼の場合の揚力（今井理論：等角写像，Kuttaの条件）

# 1, 飛行機の揚力とベルヌーイの定理

## 揚力とは

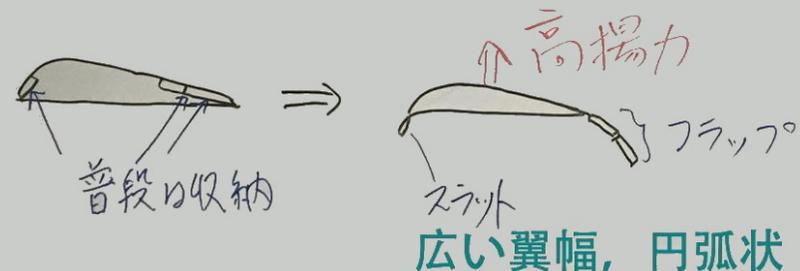


- 揚力は主翼によってのみ生まれる
- 巡航飛行時は主翼はほぼ水平。従って主翼断面は通常は上側に湾曲した厚みを持ち水平でも揚力を持つ



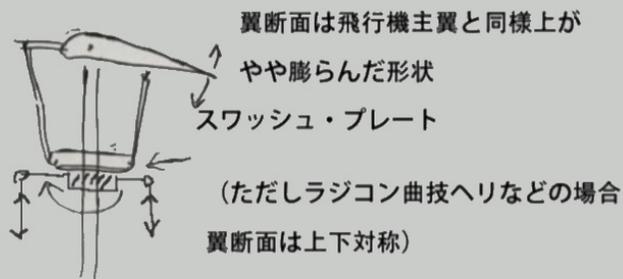
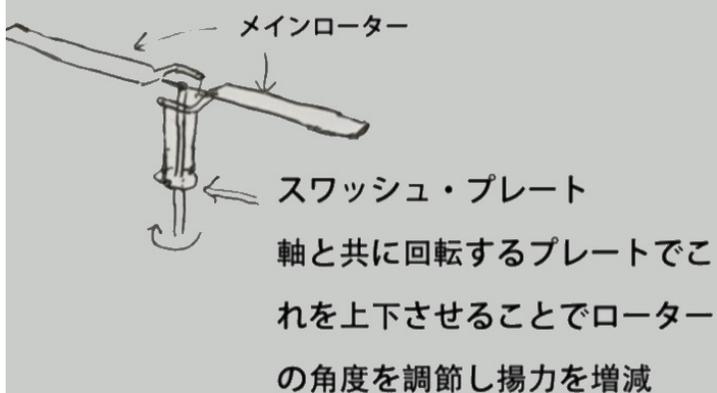
- 空中では昇降舵の上げ下げにより機首上げ下げが可能となり主翼と空気とのなす角度が変わり揚力の調節が可能。もちろんエンジン出力も寄与。

- 離陸時など低速の時は十分な揚力を得るために翼型を変える



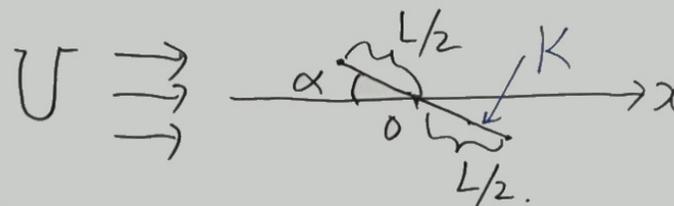
# ヘリコプターの場合の実例と目標

## ヘリコプターの場合

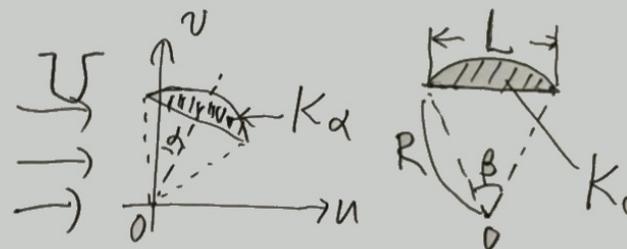


ここでは翼断面が次のとき揚力がどうなるかを今井理論に従って近似的に求めてみる

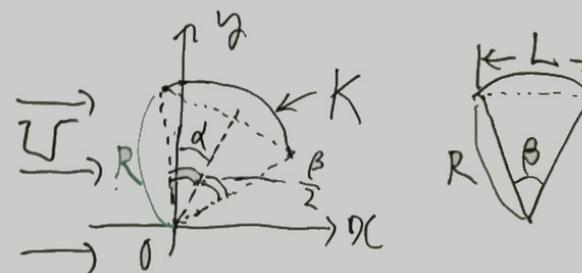
### 1. 線分翼



### 2. 平底円弧翼



### 3. 円弧翼



# 揚力発生の基本

## ベルヌーイの定理

「速く流れる流体の圧力は小さい」



⇒ 板は互いに近づいてくる

数式では

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh + \frac{\rho}{\gamma-1} \frac{P}{\rho} = \text{流れに沿って一定}$$

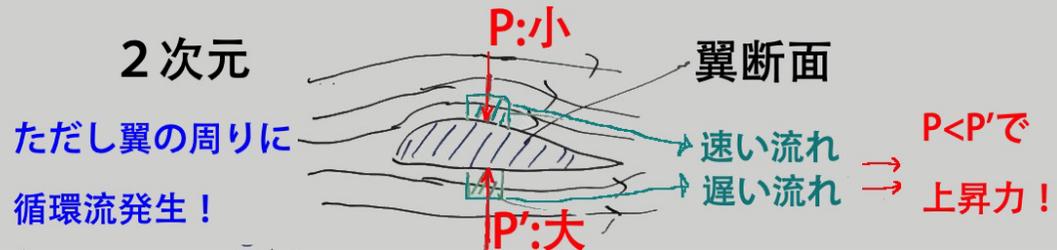
$v$ : 各点での流体の速度,  $\rho$ : 密度,  $P$ : 圧力

$\rho gh$  は重力ポテンシャル ( $h$ : 高さ)

- $\gamma (>1)$  は気体の比熱定数. 空気の場合  
は 2原子分子なので  $\gamma = \frac{7}{5}$ .
- エネルギー保存則に対応していて  
後にオイラー方程式から導出.

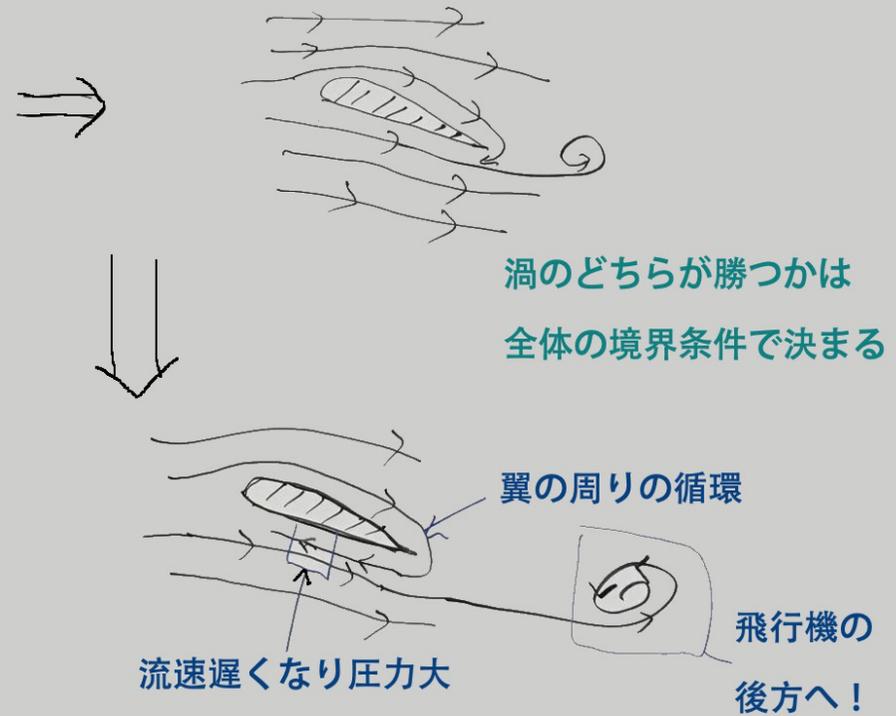
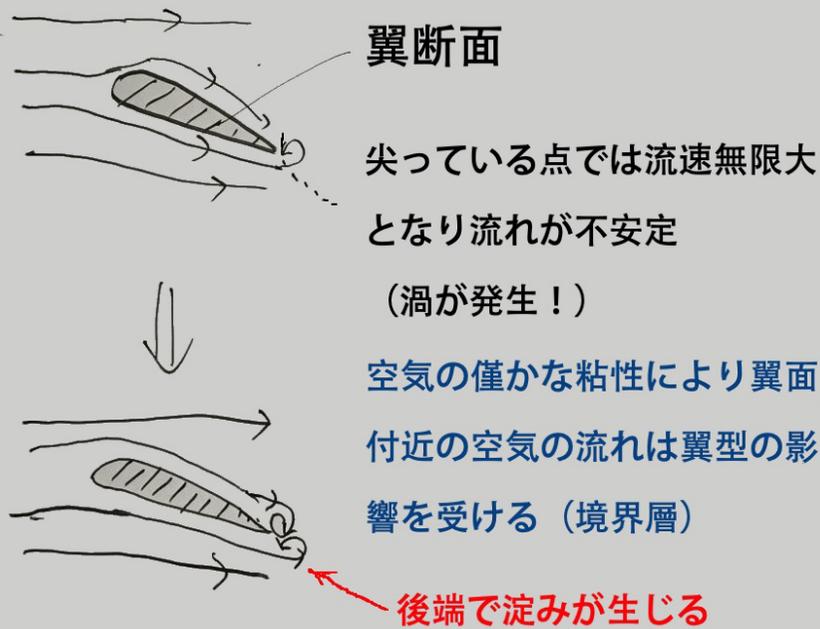
## 2次元問題への帰着

翼は断面が一定で十分長いとすると2次元  
断面での考察に帰着



# 翼の周りに発生する循環

## 循環とは



参考書：今井功「流体力学（前編）裳華房

## 2, 渦なしの場合の大気の流体力学

### 気体の流体的扱い

気体は, 自由に飛び回る分子の集合体であるがここでは連続体として扱う  
たとえば気体の小部分が小さな風船に入れられ, まとまって行動する, と考える (今井先生の本では小さなコマの集団, と表現, 43ページ)



ただし完全流体として扱うので風船同士の摩擦は0とする

$\vec{v}(x, y, z, t)$ : 時刻  $t$  に  $(x, y, z)$  に存在する気体の小部分 (風船) の速度ベクトル

$\rho(x, y, z, t)$ : 同上の小部分の密度

$P(x, y, z, t)$ : 同上の小部分の圧力

特に  $P$  は流れの方向と垂直な方向に風船の皮を内側から押す力

# 圧力と密度の関係式

## 断熱性と圧力と密度の関係

速度が音速より十分小さい航空機をとり  
囲む空気を考えるときは、空気の小部分  
(風船) 同士の熱交換もないと考える  
よって空気の各小部分において気体の  
状態方程式

$$PV = nRT \quad \left( \begin{array}{l} V: \text{体積} \\ n: \text{モル数 (分子数の比)} \\ T: \text{絶対温度} \end{array} \right)$$

(Rは気体定数:  $8.314 \times 10^7 \text{ erg/(mol}\cdot\text{deg)}$ )

が成立するだけではなく断熱からくる

もう1つの関係式が成立し、従って

密度  $n/V, T$  は圧力  $P$  の関数となる

実際、空気のような2原子分子の場合

$$\tilde{\rho} = n/V = \text{const} \cdot P^{5/7} \quad (\text{分子数密度})$$

証明. 2原子分子の自由度は  $3+2=5$  なので  
内部エネルギー  $U(T) = 5nRT/2$ . 断熱的に  
体積が  $dV$  増えたとすると外にする仕事は  
 $PdV$  でこれが内部エネルギーの減少と等  
しい. よって  $PdV + 5nRdT/2 = 0$ . 以下略.

# 流体の方程式系

$\rho(x, y, z, t)$ : 密度

$\vec{v}(x, y, z, t)$ : 流れの速度

## 1, 連続の方程式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \cdot \vec{v}) = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Eulerの連続} \\ \text{方程式} \end{array} \right.$$

## 2, Eulerの運動方程式

$$\frac{\partial \vec{v}(\vec{x}, t)}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{x}}) \vec{v}(\vec{x}, t) = \vec{g} - \frac{1}{\rho(\vec{x}, t)} \vec{\nabla}_{\vec{x}} p(\vec{x}, t)$$

ここで  $p(\vec{x}, t)$ : 圧力,  $\vec{g}$ : 重力加速度(定ハクトル).

これと空気の場合の圧力・密度の関係式を連立させると次の方程式系を得る

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{x}}) \vec{v} = -\frac{\gamma}{2} \vec{\nabla}_{\vec{x}} \left( \frac{P}{\rho} \right), \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \cdot \vec{v}) = 0, \\ \rho = C_0 \cdot P^{\frac{5}{7}} \quad (\Leftrightarrow P = C_0' \cdot \rho^{\frac{7}{5}}). \end{array} \right.$$

実際, ある正定数  $C_0$  に対し  $\rho = C_0 P^{\frac{5}{7}}$  なので,

$$\frac{1}{\rho} \vec{\nabla}_{\vec{x}} P = C_0^{-1} P^{-\frac{5}{7}} \vec{\nabla}_{\vec{x}} P = C_0^{-1} \vec{\nabla}_{\vec{x}} \left( \frac{\gamma}{2} P^{\frac{7}{5}} \right) = \frac{\gamma}{2} \vec{\nabla}_{\vec{x}} \left( \frac{P}{\rho} \right)$$

## 渦なしの流れ

### 渦なしの条件

速度ベクトル場  $\vec{v}$  に対して  $\vec{\nabla}_x \times \vec{v}$  は渦度と呼ばれ当該ベクトルの方向を軸とする流れの回転速度の大きさを表す。理想的な翼の周りの定常大気流ではこの渦度を至る所 0 と仮定する。このときEuler運動方程式は次に帰着：

$$\partial_t \vec{v} + \vec{\nabla}_x \left( \frac{1}{2} |\vec{v}|^2 + \frac{\gamma}{2} \frac{P}{\rho} \right) = 0$$

実際  $\vec{\omega} = \vec{\nabla}_x \times \vec{v}$  とおくとEuler方程式は

$$\partial_t \vec{v} - \vec{v} \times \vec{\omega} + \vec{\nabla}_x \left( \frac{1}{2} |\vec{v}|^2 + \frac{\gamma}{2} \frac{P}{\rho} \right) = 0$$

と書ける。このとき両辺に  $\vec{\nabla}_x \times$  を施すと

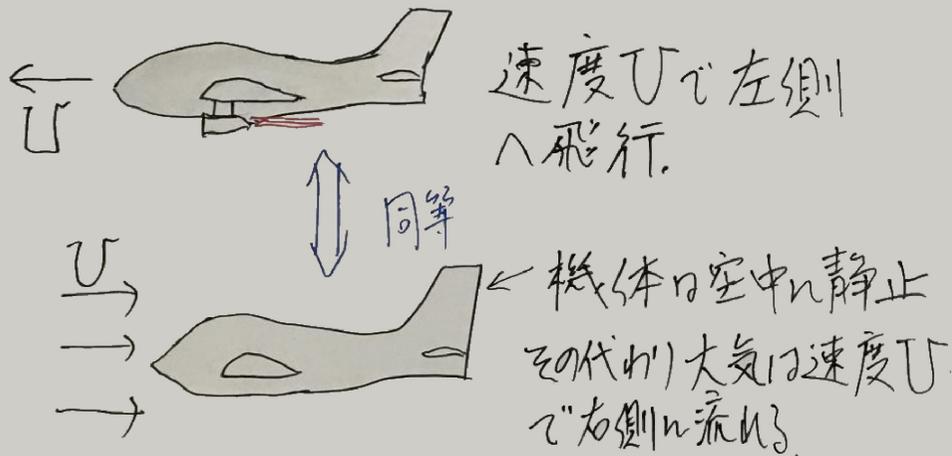
$$\partial_t \vec{\omega} - \vec{\nabla}_x \times (\vec{v} \times \vec{\omega}) = 0$$

となり時間が経っても  $\vec{\omega} \equiv 0$  は保たれる

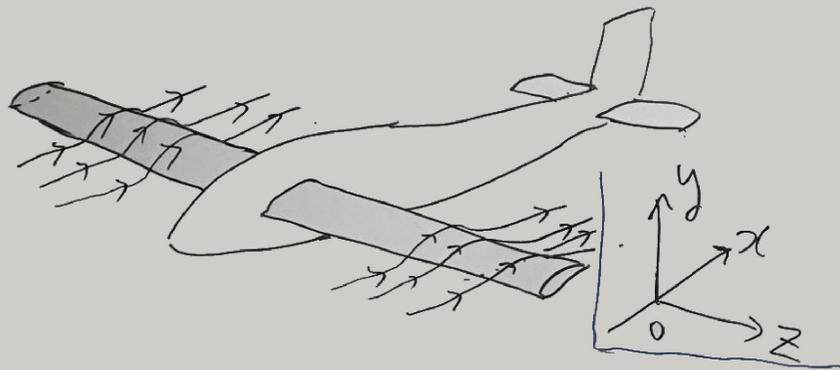
最終的に渦なしの方程式系は次に帰着：

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla}_x \times \vec{v} = 0, \\ \partial_t \vec{v} + \vec{\nabla}_x \left( \frac{1}{2} |\vec{v}|^2 + \frac{\gamma}{2} \frac{P}{\rho} \right) = 0, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}_x \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \\ \rho = C_0 \cdot P^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}. \end{array} \right.$$

### 3, 長い翼の周りの渦なし定常流



同じ翼断面を持つ細長い翼の場合 2次元化



問題のさらなる簡略化を考えるため,

- 1, 飛行機は空間に止まっていて大気の流れは時刻によらず定常的, かつ十分離れたところでは一定の速度ベクトル  $U$  に漸近する,
- 2, 翼断面の座標を  $x, y$ , 翼が伸びる方向の座標を  $z$ , また大気の無限遠での速度ベクトルを  $(U, 0, 0)$  とし, 翼端や胴体付近を除いては  $V$  の  $z$  成分は 0,  $x, y$  成分は  $z$  によらない関数であるとして2次元化.

## 2次元渦なし定常流の方程式系

ここまでの条件, 渦なし, 定常流, 2次元  
とEuler方程式, 連続方程式を合わせると,

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{v} = (v_1(x, y), v_2(x, y), 0) \\ P = P(x, y), \rho = C_0 \cdot (P(x, y))^{\frac{5}{7}} \\ \vec{\nabla}_x \times \vec{v} = 0 \Leftrightarrow (0, 0, \frac{\partial v_2(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial v_1(x, y)}{\partial y}) = 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\partial v_2(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial v_1(x, y)}{\partial y} = 0 \\ \vec{\nabla}_x \left( \frac{v_1^2 + v_2^2}{2} + \frac{7}{2} \frac{P}{\rho} \right) = 0 \quad \textcircled{1} \\ \frac{\partial}{\partial x}(\rho \cdot v_1) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho \cdot v_2) = 0 \quad \textcircled{2} \end{array} \right.$$

特に①よりベルヌーイの定理:

$$\frac{v_1^2 + v_2^2}{2} + \frac{7}{2} \frac{P}{\rho} = \text{定数} \equiv A (> 0) \quad \textcircled{1}'$$

$$\textcircled{1}' \Leftrightarrow \frac{v_1^2 + v_2^2}{2} + \frac{7}{2} C_0^{-\frac{7}{5}} \cdot \rho^{\frac{2}{5}} = A$$

$$\therefore \rho = \left( \frac{2}{7} C_0^{\frac{7}{5}} \right)^{\frac{5}{2}} \cdot \left( A - \frac{v_1^2 + v_2^2}{2} \right)^{\frac{5}{2}} \quad \textcircled{1}''$$

結局次の方程式系に帰着 ( $\alpha = 7^{-\frac{5}{2}} C_0^{\frac{7}{2}}, \beta = 2A$ )

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_1) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_2) = 0 \\ \rho = \alpha \cdot (\beta - v_1^2 - v_2^2)^{\frac{5}{2}}. \end{array} \right.$$

## 定常流の方程式系と Cauchy-Riemann 系への帰着

主定理  $\vec{v} = (v_1(x, y), v_2(x, y), 0)$ ,

$P = P(x, y)$ ,  $\rho = \rho(x, y)$  とすると  $\exists \alpha, \alpha', \beta$

$> 0$  に対して次が成立:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0, \\ \left(1 - \frac{5v_1^2}{\beta - |\vec{v}|^2}\right) \frac{\partial v_1}{\partial x} + \left(1 - \frac{5v_2^2}{\beta - |\vec{v}|^2}\right) \frac{\partial v_2}{\partial y} \\ \quad = \frac{5v_1 v_2}{\beta - |\vec{v}|^2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y}\right), \\ P = \alpha' (\beta - |\vec{v}|^2)^{7/2}, \rho = \alpha (\beta - |\vec{v}|^2)^{5/2}. \end{array} \right.$$

注意: この式からわかる事は

$$\frac{|\vec{v}|^2}{\beta} \ll 1$$

であれば非線形の効果は無視でき (?)

次のコーシー・リーマン系に帰着:

$$\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0$$

他方, 流速 0 の時の音速は:

$$\begin{aligned} C &= \sqrt{\frac{dP}{d\rho}} = \sqrt{(C_0' \rho^{7/5})'} = \sqrt{\frac{7}{5} C_0' \rho^{2/5}} \\ &= \sqrt{\frac{7}{5} C_0' \alpha^{2/5} \beta} = \sqrt{\beta/5} \quad (\Rightarrow \underline{\beta = 5C^2}) \end{aligned}$$

## 4, 複素速度ポテンシャルと2次元翼断面に働く力

これまでの仮定

- 1, 大気は完全流体 (摩擦なし) かつ断熱的
- 2, 翼は  $z$  方向に十分長く翼断面は一定
- 3, 流速ベクトル場は定常的 ( $t$  によらず)  
渦なし, 2次元, また音速との比が微小

これらの下で (複素速度場)

$$\underline{V^*(x+iy) = v_1(x,y) - i v_2(x,y)}$$

とおくと方程式系は  $V^*(z)$  ( $z=x+iy$ ) に関する

Cauchy-Riemann系に一致:

$$\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0$$

定義 (複素速度ポテンシャル)

2次元翼断面  $K$  の周りの複素速度場  $V^*(z)$  に対して  $F'(z) = V^*(z)$  を満たす解析関数  $F(z)$  を 翼断面  $K$  に対する複素速度ポテンシャル という。従って  $\underline{v_1 = \operatorname{Re} F'(z), v_2 = -\operatorname{Im} F'(z)}$  であり  $F(z)$  は次を満たす:

1,  $\mathbb{C} \setminus K$  で多価解析的,

2,  $\operatorname{Im} F(z)$  は  $\partial K$  上一定.

実際,  $\vec{\nabla}_x (\operatorname{Im} F) = (-v_2, v_1) \perp \vec{v}$ ,  $\partial K$  上  $\vec{v}$  は

$\partial K$  の接線と平行だから  $\vec{\nabla}_x (\operatorname{Im} F)$  は法線方向

## 複素速度ポテンシャルの形

### 命題 (円の外部での複素速度ポテンシャルの一般形)

$K = \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq 1\}$  に対する複素速度ポテンシャル

$F(z)$  で境界条件

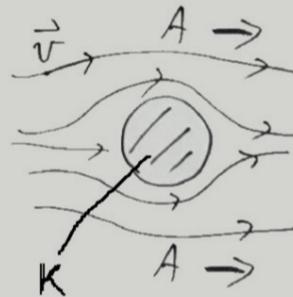
(1)  $\text{Im} F(z) = 0$  on  $\partial K$ ,

(2)  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} F'(z) = A \in \mathbb{C}$

を満たすものは

$$F(z) = Az + \bar{A}z^{-1} + iB \log z + a_0$$

の形, ただし  $B, a_0 \in \mathbb{R}$ .



証明.  $G(w) = F'(1/w)$  を考えると  $0 < |w| < 1$  で一価正則, かつ  $G(w) \rightarrow A$  ( $w \rightarrow 0$ ) なので  $w=0$  でも正則となり

$$F'(z) = A + \sum_{n=1}^{\infty} C_n z^{-n}$$

がわかる. また, 条件(1)によりFourier係数比較を使って題意の式が得られる.

(注) 一般の翼型  $K$  の場合にも  $K$  の外部を単位円の外部に 1 対 1 onto に写す等角写像を求めることによりこの結果を使う 事ができる.

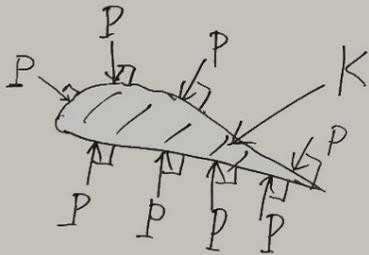
## 翼断面に働く力

### 定理 (Blasiusの第1公式)

翼型  $K$  に対する複素速度ポテンシャルを  $\Phi(z)$  とするとき  $K$  の重心に働く力は複素ベクトルとして次の通り ( $\mu = \rho_0 / 2$ ):

$$\vec{F} = \left\{ i\mu \int_{\partial K} (\Phi'(z))^2 dz \right\}$$

(全体の複素共役.  $\partial K$  は  $K$  のまわりを反時計回り)



$$\vec{v} = (Re \Phi', -Im \Phi')$$

実際  $K$  に働く力は:  $\vec{F} = \int_{\partial K} p(z) (-\vec{n}(z)) ds(z)$

ここで  $P(z)$  は大気圧,

$n(z)$  は  $\partial K$  に対する外向き単位法線,  $ds(z)$

は線素  $|dz|$  である. よって,

$$P(z) = \alpha'(\beta - |\vec{v}|^2)^{3/2}, \quad -\vec{n}(z) ds(z) = \lambda dz$$

今井理論では非圧縮としているので密度は

一定. 従って  $P(z) = P_0 - \frac{1}{2} \rho_0 |\vec{v}|^2$

我々の場合も  $|\vec{v}|^2 \ll \beta$  と考え, 第1近似

$\alpha' \beta^{3/2} (1 - \frac{2|\vec{v}|^2}{\beta}) = P_0 - \frac{7}{2} \frac{P_0}{\beta} \cdot |\vec{v}|^2$  は同じ式になる

( $\beta = 7P_0 / \rho_0$  なので)

## Blasiusの公式 1 の系

証明 ( $\mu = \rho_0/2$ )

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \int_{\partial K} (\rho_0 - \mu |\vec{v}|^2) i dz \\ &= -i\mu \int_{\partial K} |\Phi'(z)|^2 dz = -i\mu \int_{\partial K} \overline{\Phi'(z)} \Phi'(z) dz \end{aligned}$$

ここで  $\partial K$ 上  $d\overline{\Phi(z)} = d\overline{\Phi(z)}$  だから

$$\begin{aligned} \int_{\partial K} \overline{\Phi'(z)} \Phi'(z) dz &= \int_{\partial K} \overline{\Phi'(z)} \cdot d\Phi(z) = \int_{\partial K} \overline{\Phi'(z)} \cdot d\overline{\Phi(z)} \\ &= \int_{\partial K} \overline{\Phi'(z)} \overline{\Phi'(z)} d\bar{z} = \int_{\partial K} (\overline{\Phi'(z)})^2 d\bar{z} \end{aligned}$$

となり公式が示された。

注：本公式にコーシーの積分定理を適用すれば積分路として  $K$  を囲む十分大な円

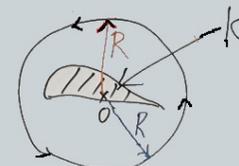
が取れる。従って積分の値は  $\Phi'(1/w)$  の  $w=0$  における級数展開の係数のみで決まる：

系.  $K \subset \{|z| < R_0\}$ , かつ

$$\Phi(z) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n z^{-n} \quad (|z| > R_0)$$

とすると

$$\underline{F = -2\pi\rho_0 \cdot \overline{C_0} C_1}$$



## 5, 平面翼, 円弧翼, 平底円弧翼, の場合の揚力

### 等角写像と複素速度ポテンシャル

翼断面  $K \subset \mathbb{C}$  に対し次のような等角写像  $z=G(w)$

$$G: \Omega = \mathbb{C} \setminus K \xrightarrow[\text{1対1, onto}]{\cong} D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$$

が存在するならば  $\Omega$  上の複素速度ポテンシャルは  $\Phi_0(G(w))$  と書けるはずである. ここで

$$\Phi_0(z) = Az + \bar{A}z^{-1} + iB \log z + a_0 \quad (B, a_0 \in \mathbb{R})$$

$\Phi_0(z)$  の境界条件は

$$(1) \operatorname{Im} \Phi_0(z) = 0 \text{ on } \partial D,$$

$$(2) \lim_{|z| \rightarrow \infty} \Phi_0'(z) = A \in \mathbb{C}$$

であったので  $D$  の自己同型を考慮すると

$K$  に対応する複素速度ポテンシャル  $F(w)$

は次の様に書ける:

$$F(w) = \Phi_0(e^{i\beta} G(w))$$

ここで  $\beta$  は実数. また定数  $A, B, \beta$  を決定する必要がある: 大気の無限遠での速度ベクトルを  $U (> 0)$  とするとき,

$$U = \lim_{|w| \rightarrow \infty} F'(w) = A e^{i\beta} \lim_{|w| \rightarrow \infty} G'(w)$$

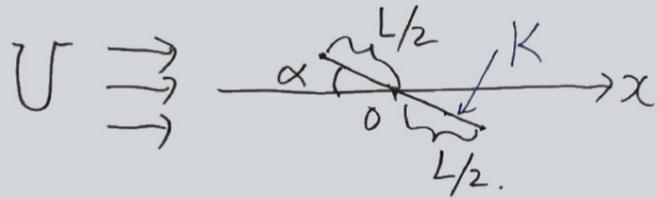
が課されると同時に次の Kutta の条件:

"翼の後端で流速が発散しない"

# 平面翼の場合 1

## (1) 平面翼 (直線翼)

$$K = e^{-i\alpha} [-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}] : \text{幅 } L (> 0), \text{角度 } \alpha (0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$$



$$\mathbb{C} \setminus K \ni w \xrightarrow{\sim} w' = \frac{z}{L} e^{i\alpha} w \in \mathbb{C} \setminus [1, 1],$$

$$\left. \begin{array}{l} \uparrow w = \frac{z+z^{-1}}{2} \\ \downarrow z = w'(1 + \sqrt{1-(w')^{-2}}) \end{array} \right\}$$

$$D = \{|z| > 1\}$$

$$\text{そこで } G: \underset{w}{\mathbb{C} \setminus K} \xrightarrow{\sim} \underset{z}{D} \quad \text{を}$$

$$\begin{aligned} G(w) &= e^{i\beta} w' (1 + \sqrt{1-(w')^{-2}}) \\ &= e^{i\beta} \frac{z}{L} e^{i\alpha} w (1 + \sqrt{1-(\frac{z}{L} e^{i\alpha} w)^{-2}}) \\ &= \frac{z}{L} e^{i(\alpha+\beta)} w (1 + \sqrt{1-(\frac{z}{L} e^{i\alpha} w)^{-2}}) \end{aligned}$$

$$\Phi(w) = \Phi_0(G(w)) = A(G(w) + G(w)^{-1}) + iB \log G(w) + a_0$$

(ただし,  $A(>0), B, a_0, \beta$  は実数とする.)

### 1. $A, \beta$ の決定

無限遠での大気速度ベクトル  $U(>0)$

から  $\beta = -\alpha, \quad A = \frac{LU}{4}.$

## 平面翼の場合 2

### 2, Bの決定

流速  $\vec{v}=(v_1, v_2)$  による  $v_1 - i v_2$   
 $= \Phi'(w) = \left\{ \frac{LU}{4} \left(1 - \frac{1}{G(w)^2}\right) + \frac{iB}{G(w)} \right\} \cdot G'(w)$

ここで  $G'(w) = \frac{2}{L} \left\{ 1 + \sqrt{1 - \left(\frac{2}{L} e^{i\alpha} w\right)^{-2}} + \frac{w \left(\frac{2e^{i\alpha}}{L} w\right)^{-3} \cdot \frac{2e^{i\alpha}}{L}}{\sqrt{1 - \left(\frac{2}{L} e^{i\alpha} w\right)^{-2}}} \right\}$

ここで翼端  $w = \pm \frac{L}{2} e^{-i\alpha}$  時は  $|G'| = \infty$  とする。

Kuttaの条件 (又は Joukowskiの仮定)

「翼後端では  $|\Phi'(w)|$  非発散」

$\Leftrightarrow$   $\star$  の分子因子 = 0 at  $w = \frac{L}{2} e^{-i\alpha}$

$\therefore B = i \frac{LU}{4} \left\{ G(w) - G(w)^{-1} \right\} \Big|_{w = \frac{L}{2} e^{-i\alpha}}$

ここで  $G(w) = \frac{2}{L} w \left( 1 + \sqrt{1 - \left(\frac{2}{L} e^{i\alpha} w\right)^{-2}} \right)$

ここで  $G\left(\frac{L}{2} e^{-i\alpha}\right) = e^{-i\alpha}$

$\therefore B = i \frac{LU}{4} (e^{-i\alpha} - e^{i\alpha}) = \frac{LU}{2} \sin \alpha$

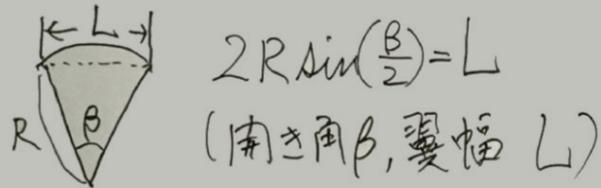
### 3, 揚力の計算

$\Phi'(w) = \left( \frac{LU}{4} + iB \cdot \frac{L}{4} w^{-1} + O(w^{-2}) \right) \cdot \frac{2}{L} (2 + O(w^{-2}))$   
 $= U + iB \cdot w^{-1} + O(w^{-2}) \quad (|w| \rightarrow \infty)$

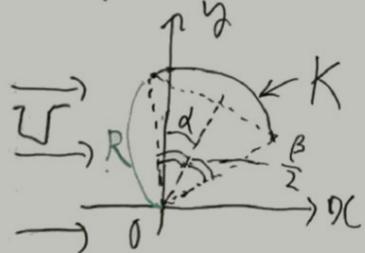
よって  $\vec{F} = (-4\pi\mu C_0 \vec{v}) = -4\pi\mu \cdot U(iB) = 2\pi\mu L \cdot U^2 \sin \alpha \cdot i$

# 円弧翼の場合 1

## (2) 円弧翼



$$K_\alpha = \left\{ R e^{i\varphi} \mid \frac{\pi}{2} - \alpha - \frac{\beta}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} - \alpha + \frac{\beta}{2} \right\}$$



$$\mathbb{C} \setminus K_\alpha \ni w$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbb{C} \setminus K_0 \ni w' = e^{i\alpha} w$$

(1)  $\mathbb{C} \setminus K_0$  における半径  $R$  の円弧を 1 次分

変換で実直線区間に写す.

$$w'' = \frac{-i}{\tan\left(\frac{\beta}{4}\right)} \frac{w' - iR}{w' + iR} : \mathbb{C} \setminus K_0 \xrightarrow{1 \neq 1} (\mathbb{C} \setminus [-1, 1]) \cup \{\infty\}$$

$$(2) \mathbb{C} \setminus [-1, 1] \xrightarrow{1 \neq 1} \{|w''| > 1\} \cup \{\infty\}$$

$$w''' = w'' (1 + \sqrt{1 - (w'')^{-2}})$$

(1) 上の対応では  $w = \infty \Rightarrow w''' = \tau_0 = -i \cot\left(\frac{\beta}{8}\right)$

そこで  $\{\tau_0\} \rightarrow \{\infty\}$ , 円周  $\{|w''| = 1\}$  を不変にする  $z = \frac{e^{i\alpha}(\tau_0 w''' - 1)}{w''' - \tau_0}$  を考える.

$$z = G(w) = e^{i\alpha} \frac{i \cot\left(\frac{\beta}{8}\right) \cdot w''' - 1}{w''' + i \cot\left(\frac{\beta}{8}\right)},$$

$$w''' = w'' (1 + \sqrt{1 - (w'')^{-2}}),$$

$$w'' = \frac{-i}{\tan\left(\frac{\beta}{4}\right)} \frac{w - iR e^{-i\alpha}}{w + iR e^{-i\alpha}}$$

## 円弧翼の場合 2

$$G: \mathbb{C} \setminus K_\alpha \xrightarrow[\text{等角.}]{} \{|z| > 1\}$$

$$\Phi(w) = \Phi_0(G(w)) = A(G(w) + G(w)^{-1}) + iB \log G(w)$$

$$\text{且し } A, B \in \mathbb{R}.$$

### 1, A, $\gamma$ の決定

$$A = U / \left( \lim_{|w| \rightarrow \infty} G'(w) \right)$$

$$\therefore \gamma = \pi - \alpha, \quad A = U \cdot R \sin\left(\frac{\beta}{4}\right).$$

### 2, B の決定

$$\Phi'(w) = \left\{ UR \sin\frac{\beta}{4} \left(1 - \frac{1}{G(w)^2}\right) + \frac{iB}{G(w)} \right\} \cdot G'(w)$$

$$\therefore \text{ここで } G'(w) = \frac{dz}{dw'''} \cdot \frac{dw'''}{dw''} \cdot \frac{dw''}{dw} \text{ であるか.}$$

このうち  $\frac{dw'''}{dw''}$  が  $w'' = \pm 1$  で  $\infty$  とする.

従ってやはり第 1 因子が後翼端で 0 から

$$\left( \frac{UL}{4\cos\left(\frac{\beta}{4}\right)} \left(1 - \frac{1}{G(w)^2}\right) + \frac{iB}{G(w)} \right) \Big|_{w'' = -1} = 0.$$

$$\therefore B = \underline{UL \sin\left(\alpha + \frac{\beta}{4}\right) / (2\cos\frac{\beta}{4})}$$

### 3, 揚力の計算

$$\Phi'(w) = \left\{ A \left(1 - \frac{1}{G(w)^2}\right) + iB \frac{1}{G(w)} \right\} \cdot G'(w)$$

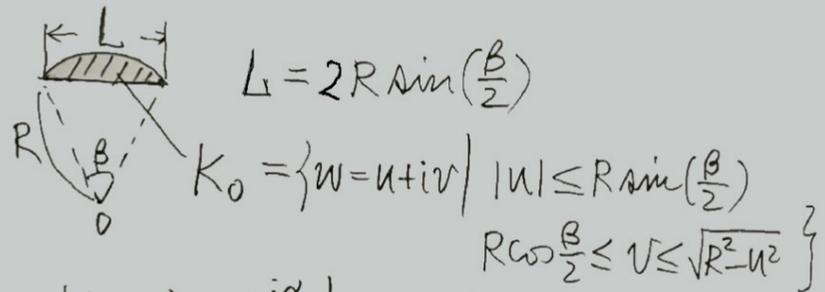
$$= \underbrace{U}_{C_0} + iB \cdot w^{-1} + \alpha w^{-2}.$$

$$\therefore \underline{F} = -4\pi\mu C_0 C_1 = 4\pi\mu i \cdot U \cdot UL \sin\left(\alpha + \frac{\beta}{4}\right) / (2\cos\frac{\beta}{4})$$

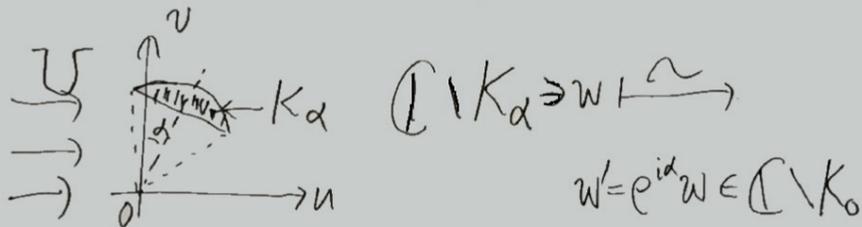
$$= \underline{2\pi\mu L U^2 \frac{\sin\left(\alpha + \frac{\beta}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\beta}{4}\right)} i}$$

# 平底円弧翼の場合 1

## (3) 平底円弧翼



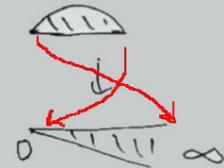
$$K_\alpha = \{w e^{-i\alpha} \mid w \in K_0\}$$



(1) K は2つの一般化された円弧で囲まれているのでそれらを同時に2直線に写像する

1次分数変換を考える。2つの交点である翼端  $R e^{i\frac{\pi \pm \beta}{2}} \rightarrow 0, \infty$  へ写す写像:

$$w'' = -\frac{w' - R e^{i\frac{\pi-\beta}{2}}}{w' - R e^{i\frac{\pi+\beta}{2}}}$$



$$w \rightarrow w'' : \mathbb{C} \setminus K_\alpha \xrightarrow{\sim} \{w'' \neq 0 \mid 0 < \arg w'' < 2\pi - \frac{\beta}{2}\}$$

$w'' \neq -1$

$$(2) w''' = (w'')^{\pi / (2\pi - \frac{\beta}{2})} : \mathbb{C} \setminus K_\alpha \xrightarrow{\sim} \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$$

開き角を  $\pi$  に縮小:

$$\therefore w \in \mathbb{C} \setminus K_\alpha \xrightarrow{\sim} \{w''' \mid \text{Im } w''' > 0, w''' \neq e^{i\pi / (2\pi - \frac{\beta}{2})}\}$$

## 平底円弧翼の場合 2

(1) 上半平面を円の外部に, かつ

$\gamma = \frac{\pi}{2\pi - (\beta/2)}$  とするとき,  $e^{i\pi\gamma} \rightarrow \infty$

$$w''' \longrightarrow z = e^{i\theta} \frac{w''' - e^{-i\pi\gamma}}{w''' - e^{i\pi\gamma}}$$

( $\theta \in \mathbb{R}$  は任意).)

$$\therefore G(w) = \frac{e^{i\theta} (w''')^\gamma - e^{-i\pi\gamma}}{(w''')^\gamma - e^{i\pi\gamma}}$$

$$w'' = - \frac{w - R e^{i(\frac{\pi-\beta}{2}-\alpha)}}{w - R e^{i(\frac{\pi+\beta}{2}-\alpha)}},$$

$$\text{但し } \gamma = (2 - \frac{\beta}{2\pi})^{-1}, \theta \in \mathbb{R}$$

$$\underline{\Phi(w) = \Phi_0(G(w)) = A(G(w) + \frac{1}{G(w)}) + iB \log G(w).}$$

1, A,  $\theta$  の決定

$$G'(w) = \frac{e^{i(\theta - \frac{\pi}{2} + \alpha - \pi\gamma)} \sin(\pi\gamma)}{\gamma R \sin(\frac{\beta}{2})} + O(w^{-1})$$

( $|w| \rightarrow \infty$ )

$$\therefore \underline{\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha + \pi\gamma}, \quad \underline{A = \frac{\gamma R \sin(\frac{\beta}{2})}{\sin(\pi\gamma)}}.$$

2, B の決定

$$\underline{\Phi'(w) = (A(1 - \frac{1}{G(w)^2}) + \frac{iB}{G(w)}) \cdot G'(w)}$$

$$A(1 - \frac{1}{G(w)^2}) + \frac{iB}{G(w)} = 0 \text{ at } w = R e^{i(\frac{\pi-\beta}{2}-\alpha)}$$

$$\therefore \underline{B = iA(G(w) - G(w)^{-1}) = -2A \cos(\alpha + \pi\gamma)}$$

# 結論

## 3, 揚力の計算

$$\begin{aligned} \Phi'(w) &= \left( A \left( 1 - \frac{1}{G(w)^2} \right) + \frac{iB}{G(w)} \right) \cdot G'(w) \\ &= \left( A + \frac{i\gamma L B}{2 \sin(\pi\gamma)} w^{-1} + O(w^{-2}) \right) \left( \frac{2 \sin(\pi\gamma)}{\gamma L} + O(w^{-2}) \right) \\ &= U + \underbrace{iB}_{C_0} \cdot w^{-1} + O(w^{-2}) \quad (|w| \rightarrow \infty) \\ \therefore \vec{F} &= (-4\pi\mu C_0) = i \cdot 4\pi\mu U \cdot B = -i \frac{4\pi\mu \gamma L U^2}{\sin(\pi\gamma)} \cos(\alpha + \pi\gamma) \end{aligned}$$

$$\cos(\alpha + \pi\gamma) = -\sin(\alpha + \pi(\gamma - \frac{1}{2}))$$

$$\therefore \text{よって } \gamma - \frac{1}{2} = \frac{2 - (2 - \frac{\beta}{2\pi})}{2(2 - \frac{\beta}{2\pi})} = \frac{\beta}{2(4\pi - \beta)}$$

$$\vec{F} = i \frac{2\pi\mu L U^2 \cdot \sin(\alpha + \frac{\pi\beta}{2(4\pi - \beta)})}{(1 - \frac{\beta}{4\pi}) \cdot \cos(\frac{\pi\beta}{2(4\pi - \beta)})}$$

## 結論

- 平面翼:  $2\pi\mu L U^2 \sin\alpha$ ,
- 平底円弧翼:  $2\pi\mu L U^2 \frac{\sin(\alpha + \frac{\pi\beta}{2(4\pi - \beta)})}{(1 - \frac{\beta}{4\pi}) \cos(\frac{\pi\beta}{2(4\pi - \beta)})}$ ,
- 円弧翼:  $2\pi\mu L U^2 \frac{\sin(\alpha + \frac{\beta}{4})}{\cos(\frac{\beta}{4})}$ .

平底円弧翼では  $\frac{\beta}{4\pi} \neq 0$  とみせるので形状因子は  $\frac{\sin(\alpha + \frac{\beta}{8})}{\cos(\frac{\beta}{8})}$  とし、円弧翼の中心角を1/4の半分に (左場合に相当).

ご静聴ありがとうございました