REGULAR-EQUIVALENCE OF 2-KNOT DIAGRAMS AND SPHERE EVERSIONS

田中 心 (東京学芸大学)

Dedicated to Professor Yukio Matsumoto on the occasion of his seventieth birthday

本講演の内容は, 高瀬将道氏 (成蹊大学) との共同研究であり, プレプリント [12] に基づいています. 高瀬氏も松本セミナー OB(筆者にとっては兄弟子) であり, 筆者が大学院生の頃, 松本先生から紹介して頂いたのだと記憶しています. 今回, 共同研究の機会を持てたことをうれしく思っています.

本文では文体を常体にさせて頂きます. なお, 本稿の文責は筆者 (田中) にあります.

1. 曲面結び目とローズマン変形

曲面結び目とは 4 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^4$ 内に埋め込まれた連結な有向閉曲面[*1]の事であり, 図式を用いた研究手法が 90 年代以降発展してきている (cf. [3]). ここで図式とは, 曲面結び目を 3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ へ射影した像（の特異点集合に交差情報を与えたもの）の事である. 図式の特異点集合は**二重点・三重点・ブランチ点**で構成され, そのうちの三重点とブランチ点が孤立して現れる.

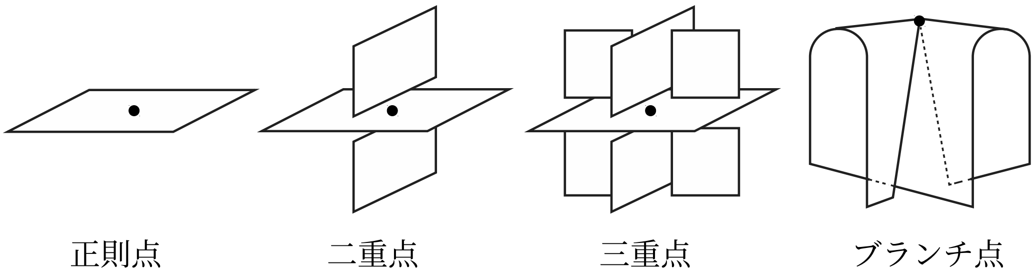

FIGURE 1. 曲面結び目図式の局所的な絵

同じ曲面結び目を表す二つの図式は, **ローズマン変形** [10] と呼ばれる図式の局所変形 (七種類) によって互いに移りあうことが知られている. 以下の図では, 高さの情報を省略している.

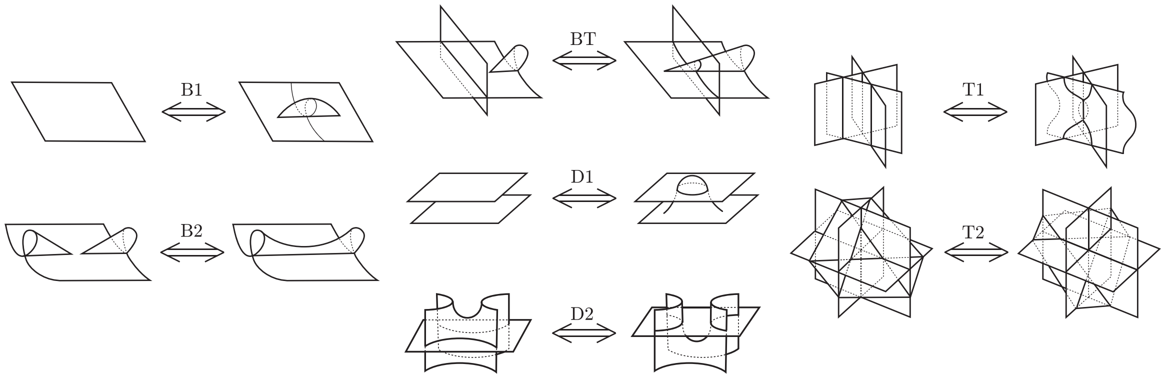

FIGURE 2. ローズマン変形

*1 4 次元球面内の埋め込みを考える場合もある. 向き付け不可能曲面を考えることもあるが, 本稿では扱わない.

2. 問題設定 (ローズマン変形の独立性)

近年, 筆者は「ローズマン変形の独立性[*2]」に興味を持っている. 知られている結果や得られた結果をまとめておく. まず「局所変形としての独立性」に関しては, 以下が知られている.

定理 2.1 (河村健吾 [7]). 七種類のローズマン変形に関して, 次が成り立つ.

(1) B1 変形は, B2 変形と D1 変形の組み合わせで表せる.
(2) B2 変形は, B1 変形と D2 変形の組み合わせで表せる.
(3) B1 と B2 以外の変形それぞれは, 残りの六種類の組み合わせでは表せない.

次に考えるべき問題は, 「同じ曲面結び目を表す二つの図式をつなぐローズマン変形の列に, どの変形が現れるのか」という問題[*3]であろう.

問題 2.2. 例えば, 次のような問題設定が自然である.

(1) 同じ曲面結び目を表す二つの図式で三重点を持たないものに対し, それらをつなぐローズマン変形の列に, 三重点を含む変形 (T1, T2, BT) が現れるかどうか？
(2) 同じ曲面結び目を表す二つの図式でブランチ点を持たないものに対し, それらをつなぐローズマン変形の列に, ブランチ点を含む変形 (B1, B2, BT) が現れるかどうか？

2.1. **問題 2.2(1) に関して.**

問題 2.2(1) は本講演のテーマではないので, 読み飛ばして頂いても構わない. Michal Jabłonowski 氏 [6] は問題 2.2(1) を考察し, 次を得ている.

定理 2.3 ([6]). 自明な $(S^2 \cup T^2)$-絡み目の図式 D, D' で, 以下を満たすものが存在する: (1) D と D' は三重点を持たない. (2) D と D' をつなぐローズマン変形の列には, 三重点を含む変形 (T1, T2, BT) のいずれかが必ず現れる.

この定理では, 一組例が与えられているだけであり, 一般にどうなるかは分かっていなかった. また, この定理の証明に於いて, 成分数が 2 以上であることや種数が正であることは本質的であった. 筆者 [8] は大城佳奈子氏と河村健吾氏と共に, 問題 2.2(1) をさらに考察し, 次を得た.

定理 2.4 ([8]). 任意の曲面絡み目 F の任意の図式 D に対して, F の図式 D' で以下を満たすものが存在する: (1) D と D' は三重点の数が同じである. (2) D と D' をつなぐローズマン変形の列には, 三重点を含む変形のうちの二種類 (T1, T2) のいずれかが必ず現れる.

この定理に於いて, D が三重点を持たない場合[*4]が, Jabłonowski 氏 [6] の拡張に当たる. 三重点を含む変形 (T1, T2, BT) に関しては, 三つを一くくりにした研究はひと段落し, 今後はそれぞれに焦点を当てて研究する段階に来ている (と感じる). 実際に, T2 変形に関する考察が得られており, T1 変形に関しても現在進行形で取り組んでいる.

2.2. **問題 2.2(2) に関して.**

問題 2.2(2) が本講演のテーマである. 佐藤進氏 [11] は, 問題 2.2(2) を考察し, 次を得ている.

定理 2.5 ([11]). 自明な T^2-結び目の図式 D, D' で, 以下を満たすものが存在する: (1) D と D' はブランチ点を持たない. (2) D と D' をつなぐローズマン変形の列には, ブランチ点を含む変形 (B1, B2, BT) のいずれかが必ず現れる.

近年, 筆者 [9] は大城佳奈子氏と共に, ラックと呼ばれる代数系を用いて別証明を与えている. 佐藤氏の証明に於いても, 我々の証明に於いても, 種数が正であることは本質的であった. つまり, 種数が 0 (= 球面結び目) の場合が未解決な状況であった. 本講演では, 球面結び目の場合に問題 2.2(1) を考察し, 得られた結果を紹介する.

[*2] 古典的結び目理論 (S^1 の $\mathbb{R}^3$ への埋め込み) に於いて, 対応する問題は「ライデマイスター変形の独立性」である. これに関しては様々な研究がなされている.

[*3] 河村氏 [7] の証明では, 各変形に対し, その変形が必ず現れる図式のペアが具体的に挙げられている. 例えば T2 変形に対しては, 四成分の曲面絡み目図式のペアが挙げられている. T2 変形に対して, 曲面結び目図式のペアがあるかどうかについては, 触れられていない.

[*4] 任意の図式が三重点を持つような曲面結び目も存在するので, 常にそのような D が取れるわけではない.

3. 主定理

以下が本講演に於ける二つの主定理[*5]である.

3.1. 主定理 (その１). 対称性 (もろて性, 可逆性) を持つような球面結び目に関して, 次を得た.

定理 3.1. 球面結び目 K の図式 D はブランチ点を持たないとする. このとき, 以下が成り立つ.

(1) K が $(+)$-もろて型ならば, D と D^* は同じ球面結び目を表し, それらをつなぐローズマン変形の列には, ブランチ点を含む変形 (B1, B2, BT) のいずれかが必ず現れる.
(2) K が可逆ならば, D と $-D$ は同じ球面結び目を表し, それらをつなぐローズマン変形の列には, ブランチ点を含む変形 (B1, B2, BT) のいずれかが必ず現れる.

ここで, D^* は D の鏡像であり, $-D$ は D の向きを逆にしたものである.

系 3.2. 自明な球面結び目の自明な図式 D に対し, D と D^* は同じ球面結び目を表し, それらをつなぐローズマン変形の列には, ブランチ点を含む変形 (B1, B2, BT) のいずれかが必ず現れる.

系 3.2 は「任意の "球面の裏返し" は, $\mathbb{R}^4$ の全同位には持ちあがらない」と言い換えることができる. なお, "球面の裏返し" に関しては, [1, 2, 4] などを参照せよ.

3.2. 主定理 (その２). 任意の (ブランチ点を持たない) 球面結び目図式に対して, ブランチ点を含む変形 (B1, B2, BT) のいずれかが必要な図式を構成した.

定理 3.3. 球面結び目の図式 D はブランチ点を持たないとする. このとき, 以下が成り立つ. D と $D_\propto$ は同じ球面結び目を表し, それらをつなぐローズマン変形の列には, ブランチ点を含む変形 (B1, B2, BT) のいずれかが必ず現れる. ここで, $D_\propto$ は次の図の操作によって, D から得られる図式である.

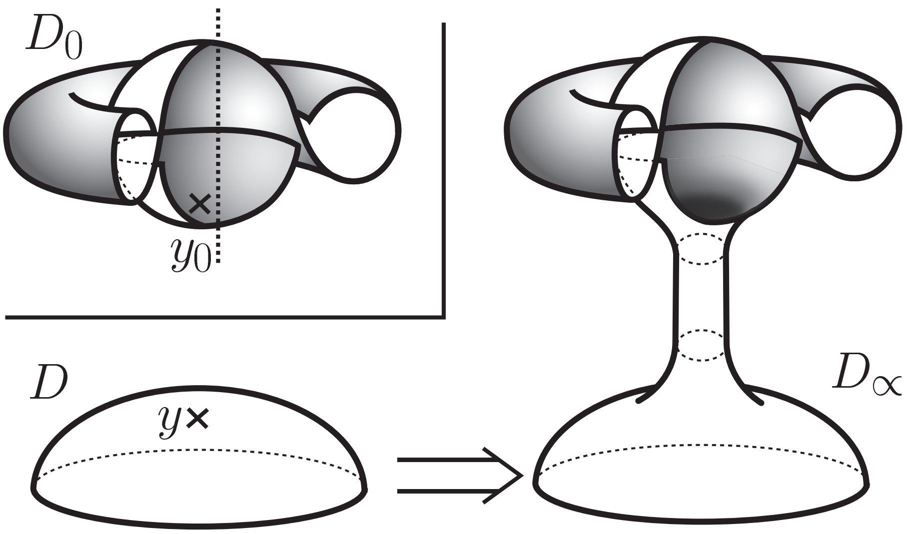

Figure 3. D の "めくれた" 図式

3.3. 証明の要点. どちらの主定理も, 基本的には以下のようなアイデアで証明した. もし, ブランチ点を含む変形が現れないとすると$\mathbb{R}^4$ の全同位に持ちあがるような, $\mathbb{R}^3$ の正則ホモトピー $\{h_t\}$ が存在する. この正則ホモトピー $\{h_t\}$ の軌跡を考え, 四重点の個数に着目すると, 以下の二つの矛盾した結論が得られる.

(1) 四重点の個数は奇数個である. ← $\boxed{\because\ \{h_t\}\text{ は "球面の裏返し" を含んでいるため}}$
(2) 四重点の個数は偶数個である. ← $\boxed{\because\ \{h_t\}\text{ は } \mathbb{R}^4 \text{ の全同位に持ちあがるため (cf. [5])}}$

[*5]実際の講演では, 定理 3.1 の系 (系 3.2) のみを紹介し, その証明の概略を説明する予定である.

Acknowledgments

本研究は JSPS 科研費 26400082 の助成を受けたものです.

References

[1] Aitchison, Iain R.: *The Holiverse: holistic eversion of the* 2*-sphere*, preprint 2010, available at arXiv:1008.0916.

[2] Carter, J. Scott: *An excursion in diagrammatic algebra: Turning a sphere from red to blue*, Series on Knots and Everything, **48** (2012), World Sci. Publ.

[3] Carter, J. Scott; Saito, Masahico: *Knotted surfaces and their diagrams,* Mathematical Surveys and Monographs, **55**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

[4] Francis, George K.; Morin, Bernard: *Arnold Shapiro's eversion of the sphere*, Math. Intelligencer **2** (1979/80), 200–203.

[5] Freedman, Michael H.: *Quadruple points of* 3*-manifolds in* S^4, Comment. Math. Helv. **53** (1978), 385–394.

[6] Jabłonowski, M.: *Knotted surfaces and equivalencies of their diagrams without triple points*, J. Knot Theory Ramifications **21** (2012), 1250019 (6 pages).

[7] Kawamura, Kengo: *On relationship between seven types of Roseman moves*, to appear in Topology Appl.

[8] Kawamura, Kengo; Oshiro, Kanako; Tanaka, Kokoro: *Independence of Roseman moves including triple points*, in preparation.

[9] Oshiro, Kanako; Tanaka, Kokoro: *On rack colorings for surface-knot diagrams without branch points*, to appear in Topology Appl.

[10] Roseman, Dennis: *Reidemeister-type moves for surfaces in four-dimensional space*, Knot theory (Warsaw, 1995), 347–380, Banach Center Publ., **42**, Polish Acad. Sci., Warsaw, 1998

[11] Satoh, Shin: *Double decker sets of generic surfaces in* 3*-space as homology classes*, Illinois J. Math. **45** (2001), 823–832.

[12] Takase, Masamichi; Tanaka, Kokoro: *Regular-equivalence of* 2*-knot diagrams and sphere eversions*, preprint 2014, available at arXiv:1406.3539.

〒184-8501 東京都小金井市貫井北町 4-1-1 東京学芸大学教育学部 自然科学系数学講座

E-mail address: `kotanaka@u-gakugei.ac.jp`